XJTU-IE, 2007.9-2008.9, M: xuchen.xuchen@163.com(徐琛), lucifer_tcl@126.com(李慰祖)

第十六章 集结计划与劳力计划

错误的信息像瘟疫一样如影随形，没有人确切地知道计划是否改变了。

——Paul Simon

13.1 引言

各种制造管理决策都需要工厂在接下来的一两年里生产什么的信息，例如以下这些

1. 人员配置（*Staffing*）。人员的招聘与培训都需要时间。管理者需要一个长期的生产计划来决定所需新增工人的数量和类型，以及安排他们上线的时机从而满足生产需求。反之，裁员代价很大也很痛苦，但有时它是必需的。通过长期计划来预测减产，使工厂可能利用自然减员或其他比直接解雇更温和的方式，至少能部分地实现减产。

2. 采购（*Procurement*）。与供应商的合约的订立，常常早于实际订单的下达。例如，企业可能需要机会来对分包商的质量和其他绩效量度进行“认证”。还有，某些采购的提前期很长（如，对于高科技组件，提前期可能是六个月或更长）。所以，与合约、长提前期订单相关的决策必须基于长期的生产计划。

3. 分包（*Subcontracting*）。在实际送出订单之前，管理者必须就制造所有组件或只执行特定作业，与分包商订立合约。要决定使用何种分包类型，也需要对所需产量的长期预测以及自有产能的修改计划。

4. 营销（*Marketing*）。营销人员应当在需求预测以及了解各种产品产能紧张与否的基础上决定对哪种产品进行促销。这就需要一个长期的生产计划和产能变更计划。

我们用以说明在长期要生产什么、何时生产的模块称为**集结计划**（**aggregate planning**，**AP**）模块。如图 13.9 所示，AP 模块在生产计划与控制（PPC）层级中占据着中心位置。其原因当然是非常多的重要决策，正如以上列示的，依赖于长期生产计划。（535|536）

正因为这么多种不同的决策都与长期生产计划相关，AP 模块就可能有多种表达方式。究竟哪一种比较合适，则取决于要解决的问题。决定新增人员的时机的模型，可能与决定哪种产品应由外部分包商制造的模型很不相同。如果我们希望同时解决这两个问题，与之不同的第三个模型可能做得到。

人员配置问题相当重要，以至于必须在图 13.9 的层级中确保它有一个独立的模块，称为**劳力计划**（**workforce planning**）模块。高层级的劳力计划（预测总人员上升或下降，制定培训政策）可以只是依据基于需求预测而对未来产能的粗略估计，而低层级的人员决策（雇用或解雇的时机，计划使用临时工，计划培训）常常基于集结计划中更详尽的生产信息。在图 13.9 的 PPC 层级的背景下，我们可以认为 AP 模块改良了 WP 模块的输出，或者是与 WP 模块合作。无论哪一种情形，它们都紧密相连。通过在本章中一同处理集结计划与劳力计划，我们强调了这种关系。

如在第十三章中所提到的，线性规划是一个非常有用的对集结计划与劳力计划共同面对的许多问题进行表达和求解的工具。在这一章里，我们将通过线性规划（LP）表述几种类型的 AP/WP 问题。我们也将在各种例子中说明线性规划（LP）作为一种求解工具的用法。

我们的目的不是给出特定 AP 问题的具体解，而是阐明通用的问题解决方法。读者应当能结合并扩展我们的解，应用于并未在这里直接说明的情形。

最后，尽管本章不会将读者训练成 LP 专家，我们还是希望他或她能够熟悉 LP 如何以及在哪里可用于解决 AP 问题。如果管理者能够认识到某些问题非常适合 LP，它们就能容易地在分析和实施方面得到技术支持（咨询人员、外部专家）。不幸的是，只有非常少的管理者利用了这种关联；结果就是，他们中的许多人刻苦钻研了一些正好适合 LP 并可以通过电子表格或其他特种方法求解的问题。

16.2 基本的集结计划

我们的讨论始于简单的集结计划，然后延伸到比较复杂的情形。本章从始至终我们都假设已有一个**需求预测（demand forecast）**。该项预测由预测模块生成，它能给出**计划展望期（planning horizon）**内各期需求的估计值。一般来说，时期以月为单位，但向未来更加深入时它们也可以代表更长的间隔。例如，时期 1 到 12 可能代表接下来的 12 个月，而时期 13 到 16 可能代表这 12 个月之后的四个季度。AP 模块常用的计划展望期是一到三年。

16.2.1 一个简单模型

第一种情形是最简单且可能的 AP 模块。（536|537）我们考虑这种情形，不仅由于它将导向一个实用模型，还由于它阐明了基本议题，为考虑更复杂的现实情况提供了基础，并展示了线性规划如何用于支持集结计划过程。

出于建模的目的，我们考虑仅有单一产品以及整间工厂可视作单一资源的情形。在每个时期，都有需求预测和产能约束。简单起见，我们假设需求表示将在期末交付的客户订单，并忽视随机性和产出损失。

在这些简化条件下，如果各期需求均小于产能，很明显就有最优方案是各期产量等于需求。这个方案及时地满足所有需求，并因而不会在各期之间建立任何库存。可是，一旦某期的需求超过产能，我们就必须预先作业（即，在提前的某些时期生产多于需求的产品）。如果需求甚至不能通过预先作业来满足，我们也希望模型能指出这一点。为了以线性规划的形式为这种情况建模，我们引入一下的记号：

t = 时期标记，其中 $t = 1, ..., \bar{t}$，故 $\bar{t}$ 为该问题的计划展望期

d_t = 第 t 期的需求，以物理单位、标准容器或其他某种合适的数量形式（假定在期末交付）

c_t = 第 t 期的产能，单位与 d_t 相同

r = 售出每单位产品的利润（不包括库存持有成本）

h = 每单位库存持有一期的成本

X_t = 第 t 期的产量（假定在第 t 期末可用于满足需求）

S_t = 第 t 期的销售量（假定第 t 期的产品可以在当期及以后出售）

I_t = 第 t 期末（满足需求之后）的库存，假定 I_0 已给出

在这些记号中，X_t、S_t和I_t是**决策变量**（**decision variables**）。也就是说，只要约束条件得到满足，求解该 LP 的计算机程序就可以自由地选择它们的值从而使目标最小化。其他变量——d_t、c_t、r、h——都是**常量**（**constant**），应为实际系统找到估计值，并作为参数使用。在本章的始终，我们约定用大写字母表示变量，用小写字母表示常量。

在产能和需求约束下最大化净利润与库存持有成本的差值的问题可以表述为（537|538）

$$\text{最大化} \quad \sum_{t=1}^{\bar{t}} rS_t - hI_t \qquad (16.1)$$

受限于:

$$S_t \le d_t \qquad t = 1, ..., \bar{t} \qquad (16.2)$$

$$X_t \le c_t \qquad t = 1, ..., \bar{t} \qquad (16.3)$$

$$I_t = I_{t-1} + X_t - S_t \qquad t = 1, ..., \bar{t} \qquad (16.4)$$

$$X_t, S_t, I_t \ge 0 \qquad t = 1, ..., \bar{t} \qquad (16.5)$$

目标函数计算净利润，方法是在各期用单位利润r乘以销售量S_t，再减去库存持有成本h与第t期末剩余库存I_t的乘积，最后在计划展望期内逐期累加。约束（16.2）将销售量限制在需求之内。如果可能的话，计算机将紧张所有这些约束，因为增大S_t值将提高目标函数值。在最优解中这些约束并非紧张的唯一原因是，产能约束（16.3）不允许。[1]约束（16.4）的形式在几乎所有的多期集结计划模型都可以见到，它称为**平衡约束**（**balance constraints**）。从物理上讲，它们的全部意义就是物料守恒；第t期末的库存I_t等于第t-1 期末的库存I_{t-1}加上第t期的产量X_t与销量S_t的差值。这些约束驱使计算机为X_t、S_t和I_t选择与它们的定义相一致的数值。约束（16.5）是简单的非负条件，排除负值产量或库存水平。除非使用者另有指定，许多求解LP的计算机软件包自动限定决策变量为非负值。

16.2.2 一个 LP 实例

为了具体地展开上述公式以及阐述使用线性规划求解的机制，现在我们来考虑一个简单的问题。图 16.1 所示的 Excel 电子表格给出单位利润r为$10，每单位每期持有成本$h$为$1，初始库存I_0为 0，接下来六个月的产能和需求分别为c_t和d_t。我们将不时地使用图 16.1 所

[1] 如果认为需求是不可违背的，我们可以移除约束（16.2）并在目标函数和约束（16.4）中用S_t替代d_t。但这样做的问题是，若需求对于产能是不可行的，计算机将终止运算并给出提示消息“不可行”，却不说明为什么。原有的公式无论需求如何都是可行的，在产能不足时它不会使销售量等于需求，因而我们会从解中知道没有能力满足需求。

示电子表格的后续形式。现在这个具体例子的 LP（16.1）~（16.5）可以表述为（538|539）

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**常量：**								
2	**r**	10							
3	**h**	1							
4	**I_0**	0							
5	**t**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**总计**	
6	**c_t**	100	100	100	120	120	120	660	
7	**d_t**	80	100	120	140	90	140	670	
8									
9	**变量：**								
10	**t**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**总计**	
11	**X_t**	0	0	0	0	0	0	0	
12	**S_t**	0	0	0	0	0	0	0	
13	**I_t**	0	0	0	0	0	0	0	
14									
15	**目标函数：**								
16	**净利润：**	$0		r*(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6)-h*(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6)					
17									
18	**约束：**								
19	**S_1**	0	<=	80	**d_1**				
20	**S_2**	0	<=	100	**d_2**				
21	**S_3**	0	<=	120	**d_3**				
22	**S_4**	0	<=	140	**d_4**				
23	**S_5**	0	<=	90	**d_5**				
24	**S_6**	0	<=	140	**d_6**				
25	**X_1**	0	<=	100	**c_1**				
26	**X_2**	0	<=	100	**c_2**				
27	**X_3**	0	<=	100	**c_3**				
28	**X_4**	0	<=	120	**c_4**				
29	**X_5**	0	<=	120	**c_5**				
30	**X_6**	0	<=	120	**c_6**				
31	**I_1-I_0-X_1+S_1**	0	=	0					
32	**I_2-I_1-X_2+S_2**	0	=	0					
33	**I_3-I_2-X_3+S_3**	0	=	0					
34	**I_4-I_3-X_4+S_4**	0	=	0					
35	**I_5-I_4-X_5+S_5**	0	=	0					
36	**I_6-I_5-X_6+S_6**	0	=	0					
37					**注释：X_t,S_t和I_t一定>=0**				

图 16.1 线性规划例子的输入数据

$$\text{最大化}\quad 10\left(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6\right)-1\left(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6\right) \tag{16.6}$$

受限于:

需求约束

$$S_1 \le 80 \tag{16.7}$$

$$S_2 \le 100 \tag{16.8}$$

$$S_3 \le 120 \tag{16.9}$$

$$S_4 \le 140 \tag{16.10}$$

$$S_5 \le 90 \tag{16.11}$$

$$S_6 \le 140 \tag{16.12}$$

产能约束

$$X_1 \leq 100 \quad (16.13)$$

$$X_2 \leq 100 \quad (16.14)$$

$$X_3 \leq 100 \quad (16.15)$$

$$X_4 \leq 120 \quad (16.16)$$

$$X_5 \leq 120 \quad (16.17)$$

$$X_6 \leq 120 \quad (16.18)$$

库存平衡约束

$$I_1 - X_1 + S_1 = 0 \quad (16.19)$$

$$I_2 - I_1 - X_2 + S_2 = 0 \quad (16.20)$$

$$I_3 - I_2 - X_3 + S_3 = 0 \quad (16.21)$$

$$I_4 - I_3 - X_4 + S_4 = 0 \quad (16.22)$$

$$I_5 - I_4 - X_5 + S_5 = 0 \quad (16.23)$$

$$I_6 - I_5 - X_6 + S_6 = 0 \quad (16.24)$$

非负约束

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0 \quad (16.25)$$

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 \geq 0 \quad (16.26)$$

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 \geq 0 \quad (16.27)$$

某些线性规划软件包允许通过文本编辑器以类似于（16.6）至（16.27）的形式输入问题表达式。这对较小的问题当然很便利，但对规模较大的问题就极其烦琐了。由于这一点，OM 研究领域正进行着数量可观的开发**建模语言（modeling languages）**的工作，以提供描述大规模优化问题的对用户友好的界面（见 Fourer、Gay 和 Kernighan 1993 关于建模语言的一个优秀的例子）。LP 如此流行以至于电子表格软件微软 Excel 正好有个内置的 LP Solver。我们可以在图 16.1 所示的电子表格中表述和求解（16.6）~（16.27）式。以下的技术性注释给出实现的细节。（539|540）

技术性注释：使用 Excel LP Solver

尽管应是读者查阅 Excel 帮助文档来了解它的使用细节，我们还是在这里对 Excel 5.0

的 LP Solver 做个简要说明。第一步是建立决策变量的单元格（图 16.1 中的 B11:G13）。我们已输入零作为其初始值，但也可以设定为任何喜欢的值；所以我们可以在开始时设定 $X_t = d_t$，这样就比零更接近最优解。电子表格可以方便地对数据进行假设分析（what-if analysis）。然而，最终我们还是要用 LP Solver 寻找决策变量的最优值。注意到为了方便起见，我们也输入一列对 X_t、S_t 和 I_t 进行加总。例如，单元格 H11 包含对单元格 B11:G13 求和的公式。这样将会使目标函数的表达更加简洁。

处理决策变量之后，我们在单元格 B16 中构建目标函数，公式是 r（单元格 B2）与总销量 S_t（单元格 H12）的乘积，减去 h（单元格 B3）与总库存（单元格 H13）的乘积。目前所有的决策变量都是零，所以计算公式的值为零；也即，无初始库存并且无产量时的净利润为零。

现在来完成约束（16.7）~（16.27）。我们需要为每个约束建立计算左侧数值的公式。对于（16.7）~（16.18），由于左侧是直接体现在电子表格中的 X_t 和 S_t，不需另写公式；但为了清晰可见，我们将其复制到单元格 B19:B30。非负约束（16.25）~（16.27）没有采用上述办法，因为在 Excel Solver 菜单中有个选项可以简单地选中所有决策变量并使其大于或等于零。约束（16.19）~（16.24）比较烦琐，因为左侧的公式涉及多个变量。例如，单元格 B31 包含计算 $I_1 - I_0 - X_1 + S_1$ 的公式（即，B13-B4-B11+B12）。我们已为这些单元格取了名字来提示它们的意义，但由于这并不是计算所必需的，任何名字都可以。我们也已将约束右侧的数值复制到 D19:D36，并在 E 列标记以使其所指清晰可见。严格来说，所有的标记都不是必需的，但由于约束可以整块指定（如，B19:B30≤D19:D30），那样做确实能使 Excel Solver 中约束的建立更简单一些。C 列的等号和不等号也不是必需的，但它们使整个格式更易于阅读。

为了使用 Excel LP Solver，我们从菜单中选择**工具/规划求解**（**Formula/Solver**）。在弹出的对话框（见 图 16.2）中，我们设定包含目标函数的单元格，选择最大化或最小化；并设定包含决策变量的单元格（可通过鼠标圈选）。然后通过“**添加**”增设约束条件。在操作的对话框（见 图 16.3）中，在“单元格引用位置”填入约束条件的左半，选择关系（≥、≤或=），并在“约束值”中填入约束条件的右半。

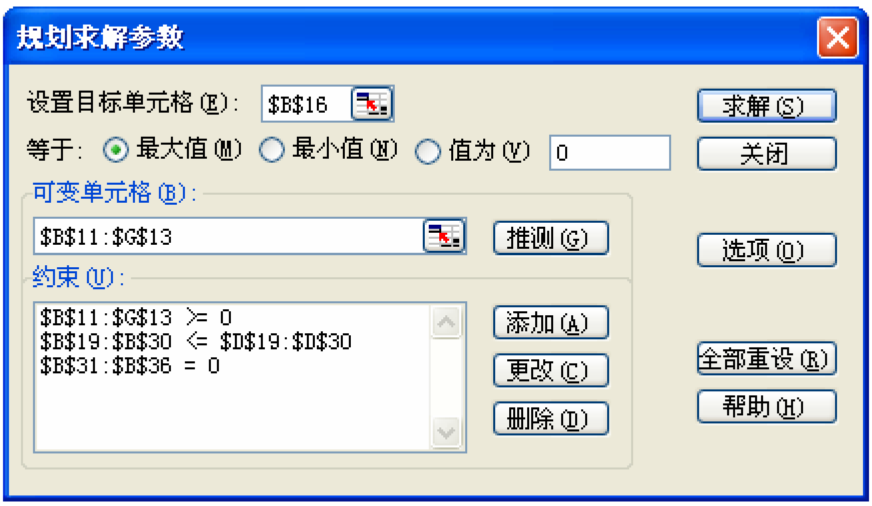

图 16.2 在 *Excel* 中设定目标函数和约束条件

图 16.3 *Excel* 的“添加约束”对话框

注意到实际的约束条件并没有在电子表格中清楚地显示，它只是被输入 **Solver** 的菜单。然而，约束条件的右侧可能是电子表格中的其他单元格或是一个常数。通过设定一组单元格表示约束条件的左侧，设定一个常数表示右侧，我们就可以通过一条命令添加一组约束。例如，B11:G13 表示所有的决策变量，故如果我们用这组单元格作为左侧，再用一个≥，以及一个零值作为右侧，就实现了非负性约束（16.25）~（16.27）。输入一个约束之后，按“**添加**”来增设新约束。模型的所有约束输入完毕后，按“**确定**”，回到原始界面。在任何时候，都可以更改或删除原先输入的约束。

最后，在运行模型之前，还必须告诉Excel我们希望它使用LP解法。[2]可以按“**选项**”弹出另一个对话框（见 图 16.4），选择“**采用线性模型**”。在这个表中还可以限制最长运算时间以及允许的误差。（540|541）如果模型的解不收敛，则很可能是约束出了问题。可有些时候延长运算时间或降低允许误差，也可能在Solver找不到解时使问题出现转机。读者应当查阅Excel使用手册来获取这个以及其他方面的详细信息，因为在本书的编写过程中Excel的文档也在更新。点击“**确定**”，回到原始界面。（541|542）

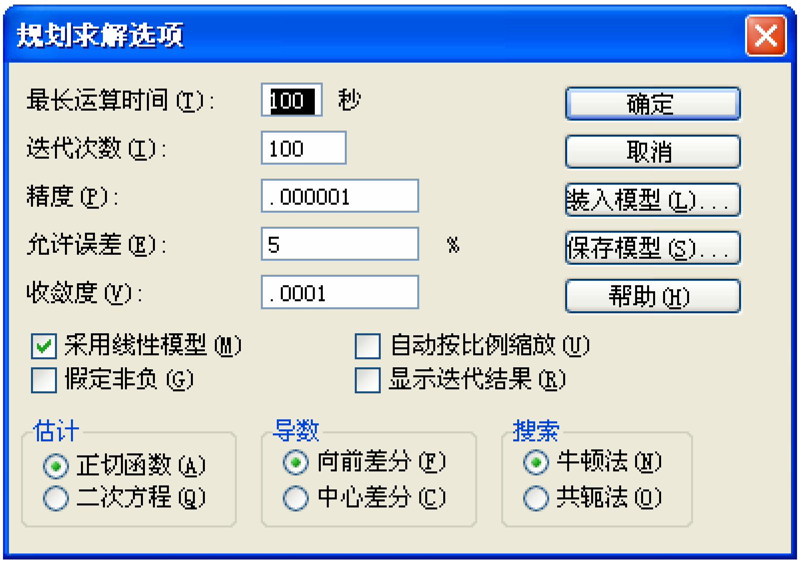

图 16.4 设定 *Excel* 采用线性规划

做完所有这一切，我们就可以点击“**求解**”按钮来运行模型。其间暂停一下以设置合适的输出形式，然后继续检查其他解（尽管对于像本例这样的小问题花不了太长时间）。

---

[2] Excel 也可用于求解非线性优化问题并将非线性算法作为默认设置。由于 LP 的效率高得多，只要模型符合我们就希望使用这种方法。本章的所有模型都是线性的，故而可用 LP。

一般地，LP 的先找到一个可行解——满足所有约束的——然后再生成新的演化解，每个都比以前的更优。当不可能进一步改进时，运算停止，当前解即是最优：它使目标函数最大化或最小化。附录 16A 介绍了这个过程的背景知识。

出现下列三种情况之一时，运算停止：

1. *找不到可行解*。这可能意味着该问题没有可行解，也就是说没有能满足所有约束的解。这可能是由于打字的错误（如，一个加号被错误地打成减号）或实在的不可行（如，产能无法满足需求）。注意到通过灵巧的表述，可以在不可行的情况下避免运算以这个令人沮丧的消息终止。例如，在（16.6）~（16.27）中，我们不强令销量等于需求。由于累积需求超出累积产能，想要二者相等显然是不可行的。通过分别设置销量和产量，我们使计算机报告哪里的需求无法满足。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**常量：**							
2	**r**	10						
3	**h**	1						
4	**I_0**	0						
5	**t**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**总计**
6	**c_t**	100	100	100	120	120	120	680
7	**d_t**	80	100	120	140	90	140	670
8								
9	**变量：**							
10	**t**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**总计**
11	**X_t**	100	100	100	120	110	120	650
12	**S_t**	80	100	120	120	90	140	650
13	**I_t**	20	20	0	0	20	0	60
14								
15	**目标函数：**							
16	**净利润：**	$6,440		r*(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6)-h*(I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6)				
17								
18	**约束：**							
19	**S_1**	80	<=	80	**d_1**			
20	**S_2**	100	<=	100	**d_2**			
21	**S_3**	120	<=	120	**d_3**			
22	**S_4**	120	<=	140	**d_4**			
23	**S_5**	90	<=	90	**d_5**			
24	**S_6**	140	<=	140	**d_6**			
25	**X_1**	100	<=	100	**c_1**			
26	**X_2**	100	<=	100	**c_2**			
27	**X_3**	100	<=	100	**c_3**			
28	**X_4**	120	<=	120	**c_4**			
29	**X_5**	110	<=	120	**c_5**			
30	**X_6**	120	<=	120	**c_6**			
31	**I_1-I_0-X_1+S_1**	0	=	0				
32	**I_2-I_1-X_2+S_2**	0	=	0				
33	**I_3-I_2-X_3+S_3**	0	=	0				
34	**I_4-I_3-X_4+S_4**	0	=	0				
35	**I_5-I_4-X_5+S_5**	0	=	0				
36	**I_6-I_5-X_6+S_6**	0	=	0				
37					**注释：X_t,S_t和I_t必须>=0**			

图 16.5 *LP* 例子的输出表格

2. *不收敛*。这或者意味着算法无法在给定的时间里找到最优解（此时可以在“**选项**”菜单里延长运算时间或降低允许误差），或者意味着算法可以无穷尽地找到更优的解。该当问题**无界（unbounded）**，即通过某些变量绝对值无限地增大而目标函数可以达到无穷时，第二种情况可能发生。它们通常是未能合适地约束变量的结果。例如，对于前面的模型，如果忘记指定所有的决策变量必须非负，则模型就可能通过选择负的 I_t 而使目标值无限大。

我们当然无法通过负的库存水平获取收益，所以应设立非负约束来消除这种无意义行为。[3]

3. 找到一个解。这是我们想要的结果。当出现这种情况，程序就会将决策变量的最优值、目标函数值和约束值写入电子表格。图 16.5 显示了 LP 算法运行后的电子表格。程序还给出三份报告——运算结果、敏感性和极限值报告，它们将最优解的相关信息写入另一个电子表格中。在“规划求解结果”对话框中选择“运算结果报告”，将生成包含图 16.6 和图 16.7 的电子表格。图 16.8 的内容在“敏感性报告”中。

目标单元格（最大值）

单元格	名字	初值	终值
$B$16	净利润：	$6,440	$6,440

可变单元格

单元格	名字	初值	终值
$B$11	X_t	100	100
$C$11	X_t	100	100
$D$11	X_t	100	100
$E$11	X_t	120	120
$F$11	X_t	110	110
$G$11	X_t	120	120
$B$12	S_t	80	80
$C$12	S_t	100	100
$D$12	S_t	120	120
$E$12	S_t	120	120
$F$12	S_t	90	90
$G$12	S_t	140	140
$B$13	I_t	20	20
$C$13	I_t	20	20
$D$13	I_t	0	0
$E$13	I_t	0	0
$F$13	I_t	20	20
$G$13	I_t	0	0

图 16.6 *LP* 例子的最优值报告

既然生成了一个最优解，我们就来解释它。图 16.5——最终的电子表格和图 16.6 都显示了最优决策变量。从中可以看到，每期用上全部产能进行生产并不是最优的。特别地，五月份产能为 120 而产量为 110。考虑到需求超过产能，这很奇怪。但如果更仔细地检视就会发现，时期 1~4 的累积需求为 440，而累积产能仅为 420。（542|543）所以，即使在前四个月中倾全力生产，仍有 20 件的赤字。最后两个月的需求仅为 230，而产能为 240。现在的模型不允许生产延后，所以没有理由使五月和六月的产量大于 230 件。任何过剩的产量都无法用于补足先前的赤字。

图 16.7 给出约束条件的更多细节，它显示了哪些**达到了限制（binding）**或称**紧张（tight）**，哪些**未达到限制（nonbinding）**或称**松弛（slack）**，以及到了何种程度。最有意思的是（16.7）~（16.12）中关于销量的，以及（16.13）~（16.18）中关于产能的。如我们已经提到的，X_5 的产能约束未达到限制。五月的产能为 120，而产量为 110，所以该约束有着 10 的松弛量。它意味着如果微调这个约束（如，将五月的产能从 120 降到 119），最优解不会发生变化。

[3] 我们将在本章的后续部分展示如何修改表述来允许延后（backordering），它很像负的库存水平，却不会对目标函数产生不适当的影响。

同理，除了 S_4，所有的销量约束都是紧张的。由于销量限制在 140，而最优销量是 120，这个约束有着 20 的松弛量。再一次地，如果微调这个约束（如，销量限制在 141），最优解仍保持不变。

与上述情形相反，让我们考虑一个紧张的约束。例如，看看图 16.7 第七行 X_1 的产能约束。由于模型在一月份选择产量等于产能，这个约束是紧张的。如果通过提升或降低产能来改变这个约束，最优解就会发生变化。比如说通过将产能提升到 101 来**松弛**（**relax**）这个约束，我们就将能多满足一个单位的需求，并因此使净利润增加。（543|544）我们在一月又多生产了一个，以每月$1 的成本持有三个月后到达四月，以$10 的价格卖出，这样一来目标函数的总增量就是$10 - 3 = $7。反之，如果通过降低产能到 99 来**紧张**（**tighten**）这个约束，

约束

单元格	名字	单元格值	公式	状态	型数值
$B$19	S_1	80	$B$19<=$D$19	到达限制值	0
$B$20	S_2	100	$B$20<=$D$20	到达限制值	0
$B$21	S_3	120	$B$21<=$D$21	到达限制值	0
$B$22	S_4	120	$B$22<=$D$22	未到限制值	20
$B$23	S_5	90	$B$23<=$D$23	到达限制值	0
$B$24	S_6	140	$B$24<=$D$24	到达限制值	0
$B$25	X_1	100	$B$25<=$D$25	到达限制值	0
$B$26	X_2	100	$B$26<=$D$26	到达限制值	0
$B$27	X_3	100	$B$27<=$D$27	到达限制值	0
$B$28	X_4	120	$B$28<=$D$28	到达限制值	0
$B$29	X_5	110	$B$29<=$D$29	未到限制值	10
$B$30	X_6	120	$B$30<=$D$30	到达限制值	0
$B$31	I_1-I_0-X_1+S_1	0	$B$31=0	未到限制值	0
$B$32	I_2-I_1-X_2+S_2	0	$B$32=0	未到限制值	0
$B$33	I_3-I_2-X_3+S_3	0	$B$33=0	未到限制值	0
$B$34	I_4-I_3-X_4+S_4	0	$B$34=0	未到限制值	0
$B$35	I_5-I_4-X_5+S_5	0	$B$35=0	未到限制值	0
$B$36	I_6-I_5-X_6+S_6	0	$B$36=0	未到限制值	0
$B$11	X_t	100	$B$11>=0	未到限制值	100
$C$11	X_t	100	$C$11>=0	未到限制值	100
$D$11	X_t	100	$D$11>=0	未到限制值	100
$E$11	X_t	120	$E$11>=0	未到限制值	120
$F$11	X_t	110	$F$11>=0	未到限制值	110
$G$11	X_t	120	$G$11>=0	未到限制值	120
$B$12	S_t	80	$B$12>=0	未到限制值	80
$C$12	S_t	100	$C$12>=0	未到限制值	100
$D$12	S_t	120	$D$12>=0	未到限制值	120
$E$12	S_t	120	$E$12>=0	未到限制值	120
$F$12	S_t	90	$F$12>=0	未到限制值	90
$G$12	S_t	140	$G$12>=0	未到限制值	140
$B$13	I_t	20	$B$13>=0	未到限制值	20
$C$13	I_t	20	$C$13>=0	未到限制值	20
$D$13	I_t	0	$D$13>=0	到达限制值	0
$E$13	I_t	0	$E$13>=0	到达限制值	0
$F$13	I_t	20	$F$13>=0	未到限制值	20
$G$13	I_t	0	$G$13>=0	到达限制值	0

图 16.7 *LP* 例子的最优约束状态

就只能从一月送 19 件给三月，并因此在三月损失了一个单位的需求，这样一来净利润的损失就是$8（$10 – 两个月的持有成本$2）。

LP算法生成的敏感性数据表示如图 16.8，它以更直观的方式呈现出最优解对约束变化的敏感性。该报告分行显示了模型中的所有约束，并给出三条重要信息：[4]

1. **影子价格（shadow price）**表示约束右侧系数增加一个单位引起最优目标值的增量。

可变单元格

单元格	名字	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
$B$11	X_t	100	0	0	1E+30	7
$C$11	X_t	100	0	0	1E+30	8
$D$11	X_t	100	0	0	1E+30	9
$E$11	X_t	120	0	0	1E+30	10
$F$11	X_t	110	0	0	1	9
$G$11	X_t	120	0	0	1E+30	1
$B$12	S_t	80	0	10	1E+30	3
$C$12	S_t	100	0	10	1E+30	2
$D$12	S_t	120	0	10	1E+30	1
$E$12	S_t	120	0	10	1	7
$F$12	S_t	90	0	10	1E+30	10
$G$12	S_t	140	0	10	1E+30	9
$B$13	I_t	20	0	-1	3	7
$C$13	I_t	20	0	-1	2	7
$D$13	I_t	0	0	-1	1	7
$E$13	I_t	0	-11	-1	11	1E+30
$F$13	I_t	20	0	-1	1	9
$G$13	I_t	0	-2	-1	2	1E+30

约束

单元格	名字	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
$B$19	S_1	80	3	80	0	20
$B$20	S_2	100	2	100	0	20
$B$21	S_3	120	1	120	0	20
$B$22	S_4	120	0	140	1E+30	20
$B$23	S_5	90	10	90	10	90
$B$24	S_6	140	9	140	10	20
$B$25	X_1	100	7	100	20	0
$B$26	X_2	100	8	100	20	0
$B$27	X_3	100	9	100	20	0
$B$28	X_4	120	10	120	20	120
$B$29	X_5	110	0	120	1E+30	10
$B$30	X_6	120	1	120	20	10
$B$31	I_1-I_0-X_1+S_1	0	7	0	20	0
$B$32	I_2-I_1-X_2+S_2	0	8	0	20	0
$B$33	I_3-I_2-X_3+S_3	0	9	0	20	0
$B$34	I_4-I_3-X_4+S_4	0	10	0	20	120
$B$35	I_5-I_4-X_5+S_5	0	0	0	110	10
$B$36	I_6-I_5-X_6+S_6	0	1	0	20	10

图 16.8 *LP* 例子的敏感性分析

[4] 该报告也包含目标函数系数的敏感性信息。见附录 16A 对此的讨论。

2. **允许的增量（allowed increase）**表示在保持当前影子价格不变的前提下右侧系数的最大增量。

3. **允许的减量（allowed decrease）**表示在保持当前影子价格不变的前提下右侧系数的最大减量。

附录 16A 给出如何计算这些数字的几何学解释。（544|545）

为了对解释这些数据做出示例，现在考虑图 16.8 约束部分的第七行 $X_1 \le 100$ 。影子价格为$7，它的意思是如果该约束变成 $X_1 \le 101$，净利润将增加$7，确切地等于我们在前面计算的值。允许的增量为 20，它的意思是时期 1 中产能提升 1~20 单位时每单位能新增净利润$7。因此，产能从 100 升高到 120 将给净利润带来 20×7 = $140 的增量。在 20 单位之上，就已经完全满足了四月份损失的的需求，所以再增加也不会提高利润。故而，一旦右侧系数超过 120，这个约束就不再紧张了。注意到该约束的允许的减量为零。它的意思是$7 的影子价格不适用于右侧系数的降低。如我们在前面计算的值，一月份产能降低一个单位时净利润减少$8。一般地，要确定允许的增量或减量之外的变化的影响，只能在电子表格中改变约束并再次通过 LP Solver 求解。

上述实例说明了线性规划模型的一些基本行为：

1. 微调非紧张约束的右侧系数不影响最优解。非紧张约束的影子价格总是零。（545|546）
2. 在允许的增量之内提高紧张约束的右侧系数，将给目标函数带来系数增量乘以影子价格这么大的增量。
3. 在允许的减量之内降低紧张约束的右侧系数，将给目标函数带来系数减量乘以影子价格这么大的减量。
4. 变动超出允许的增量或减量时，其影响不确定，必须对修正的模型重新求解。
5. 所有这些敏感性结果都仅限于*一次改动一个右侧系数*。如果一次改动了多个，其影响并不一定是累加的。一般来说，多变量敏感性分析必须通过对修正的模型重新求解来实现。

16.3 产品组合计划

既然已经为表述和求解集结计划问题建立了基本的框架，我们现在可以检视一些常见情况了。第一个要考虑的实际集结计划议题就是产品组合计划。这时，我们需要将前面章节的模型扩展到明确考虑多产品。如在前面提到的，允许多产品将可能引发“漂移的瓶颈”。即，如果不同的产品在各工站处需要不同长短的加工时间，则某时期内负担最终的工站将取决于该时期的产品组合。若该组合有柔性，我们可以使用 AP 模块依据可用产能对其进行调整；若该组合完全固定，我们可以使用 AP 模块来识别瓶颈。

16.3.1 基本模型

我们始于对先前单产品模型的扩展，在那里需求被假设是固定的，目标函数是最小化库存持有成本。先引入如下的记号：

i = 产品标记，$i = 1, ..., m$，故 m 表示产品类型的总数
j = 工站标记，$j = 1, ..., n$，故 n 表示工站类型的总数

t = 时期标记，$t = 1, ..., \bar{t}$，故$\bar{t}$表示计划展望期

$\overline{d}_{it}$ = 产品 i 在时期 t 的最大需求量

$\underline{d}_{it}$ = 产品i在时期t的最小销售量[5]

a_{ij} = 每单位产品 i 在工站 j 所需的加工时间

c_{jt} = 工站 j 在时期 t 的产能

r_i = 每单位产品 i 的净利润

h_i = 产品i的单位时间持有成本[6]（546|547）

X_{it} = 产品 i 在时期 t 的产量

S_{it} = 产品 i 在时期 t 的销量

I_{it} = 产品 i 在时期 t 末的库存量（I_{i0} 已给出）

再一次地，X_{it}、S_{it} 和 I_{it} 是决策变量，其他符号是表示模型输入的常数。我们可以在服从销量与产能约束的上下限的情况下最大化净利润与库存持有成本的差值，从而给出该问题的线性规划表述

$$\text{最大化} \quad \sum_{t=1}^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{m} r_i S_{it} - h_i I_{it} \qquad (16.28)$$

受限于:

$$\underline{d}_{it} \le S_{it} \le \overline{d}_{it} \qquad \text{对所有 } i, t \qquad (16.29)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_{it} \le c_{jt} \qquad \text{对所有 } j, t \qquad (16.30)$$

$$I_{it} = I_{it-1} + X_{it} - S_{it} \qquad \text{对所有 } i, t \qquad (16.31)$$

$$X_{it}, S_{it}, I_{it} \ge 0 \qquad \text{对所有 } i, t \qquad (16.32)$$

与先前的单产品模型相比，我们调整了（16.29）式来增设对销量下限的约束。其现实意义可能是，该企业有着必须按某个最低数量生产某种产品的长期合约。与之相反，产品的市场容量则是有限的。为了最大化利润，计算机就有动力设置产量使这些约束达到上限。然

[5] 它可能表示企业的承诺，而我们也不想让计算机程序违背。

[6] 常常设定 h_i 等于产品 i 的原材料成本与当期利率的乘积来表示沉淀于库存的金钱的机会成本，但也可以使用较大的值来凸显引起无竞争力的长周期期时间的库存。

而，它们却可能由于（16.30）式的产能约束而不一定可行。注意到与前面的模型不同，我们现在在各期都对各个工站有产能约束。通过观察哪些约束是紧张的，我们识别出限制生产的资源。（16.31）式是多产品版本的平衡方程，（16.32）则是一般的非负性约束。

从 LP（16.28）~（16.32）可得几条重要信息，如

1. **需求可行性（Demand feasibility）**。我们能指出一组需求是否产能可行。如果 $S_{it} \le \bar{d}_{it}$ 紧张，则需求上限 $\bar{d}_{it}$ 可行；如果不紧张，则它产能不可行。如果需求下限 $\underline{d}_{it}$ 产能不可行，计算机就会返回一条“找不到可行解”的消息，操作者必须做出某种改变（如，削减需求或提升产能）。

2. **瓶颈位置（Bottleneck location）**。（16.30）式限制了各期各工站的产量。通过观察哪些约束是紧张的，我们可以识别哪些工站在哪期限制了产量。在许多时期一直紧张的工站是个明显的瓶颈，需要管理者更密切的关注。

3. **产品组合（Product mix）**。如果某些产品因为产能而不能做到需求上限，计算机就会将其销量降到最大值以下。它会通过生产净利润高的产品而使收益最大化，但如我们将在以下的例子中看到的，由于产能约束，这并不简单。（547|548）

16.3.2 一个简单的例子

让我们考虑一个简单的产品组合实例，它将显示为什么这些需要一个规范的优化方法。我们通过假设一个仅为一期的计划展望期来使问题简化。这当然不是一个有实际意义的假设；但对于我们已经知道不会从某期送库存到下一期的情形，在每期求解单期问题将产生最优解。例如，如果各期的需求和成本系数保持不变，就不会有建立库存的动力，并因而出现这种情形。

考虑一家企业生产 1 和 2 两种产品的情形。表 16.1 给出这两种产品的属性数据。除了与各种产品相关的直接原材料成本，我们还假设每年$5,000 的人力和设备固定成本。还有，工站 A~D 有 2,400 分钟（每周五天，每天八小时）的可用时间。我们假设所有这些数据在每周都是相等的。因此，没有理由在某周为了下周的销售而建立库存。（如果能以本周的产量满足本周的需求，下周同样能做到。）故而，我们将注意力集中于单周，而唯一的问题就是每种产品的合适产量。

表 16.1 单期 *AP* 例子的输入数据

产品	1	2
售价	$90	$100
原材料成本	$45	$40
周最大销售量	100	50
A工站每分钟产量	15	10
B工站每分钟产量	15	30
C工站每分钟产量	15	5
D工站每分钟产量	15	5

成本方法（A Cost Approach）。让我们首先从一种简单的成本视角考察这个问题。产品 1 的销售净利润为$45（$90 - 45），而产品 2 的销售净利润为$60（$100 - 40）。这似乎意味着应

当加重产品 2 的生产。理想状况是生产 50 件产品 2 来满足最大量的需求，但还必须检查四个工站的产能来看是否可能。四个工站中，工站 B 制造产品 2 所需的时间最长（30 小时），它是个潜在的约束。工站 B 生产 50 件产品 2 需用时

30 分钟/件×50 件 = 1,500 分钟

小于工站 B 的可用时间 2,400 分钟，故生产 50 件产品 2 是可行的。（548|549）

现在我们需要决定剩余的产能还可以生产多少件产品 1。工站 A 到 D 的未用时间是

工站 A　2,400 - 10（50） = 1,900 分钟
工站 B　2,400 - 30（50） = 900 分钟
工站 C　2,400 - 5（50） = 2,150 分钟
工站 D　2,400 - 5（50） = 2,150 分钟

生产一件产品 1 在各工站处需用 15 分钟，将各个未用时间除以 15 就可以得到在各处的最大可能产量。又由于工站 B 剩的时间最少，它是潜在的瓶颈。工站 B 处（减去已生产 50 件产品 2 的时间之后）产品 1 的最大可能产量为

900 / 15 = 60

所以，即使能卖出 100 件的产品 1，但产能仅为 60 件。

每周生产 60 件产品 1 和 50 件产品 2 的利润为

$45×60 + $60×50 - $5,000 = $700

这是我们能做到的最好情况吗？

瓶颈方法（A Bottleneck Approach）。前述分析完全以成本为先决条件，并仅将产能作为事后补充。一种较好的方法可能是通过计算使用每分钟瓶颈时间的利润（*profit per minute of bottleneck time used*）这项比率，来同时考虑成本和产能。它要求首先确定瓶颈，这可以通过计算每个工站满足最大量需求所用的时间并观察哪里的负载最重来实现。[7]这样有

工站 A　15（100）+ 10（50） = 2,000 分钟
工站 B　15（100）+ 30（50） = 3,000 分钟
工站 C　15（100）+ 5（50） = 1,750 分钟
工站 D　15（100）+ 5（50） = 1,750 分钟

仅有工站 B 所需的时间超过可用的 2,400 分钟，所以我们指明它是瓶颈。这样，我们就希望工站 B 的时间得到获利最多的应用。为了决定哪种产品适合这个目的，我们计算工站 B 处净利润与时间的比率

加工产品 1　$45 / 15 = $3 /分钟
加工产品 2　$60 / 30 = $2 /分钟

这个计算结果颠覆了前述的成本分析。工站 B 用于加工产品 1 的每分钟带来$3 的净利，而加工产品 2 仅带来$2 的净利。因此，我们应当加重产品 1 的生产，而非产品 2。如果生产 100 件产品 1（需求约束下的最大数量），各工站处的未用时间为（549|550）

工站 A　2,400 - 15（100） = 900 分钟

工站 B 是产品 2 的最慢作业，所以它限制了可能的产量。每件产品 2 在工站 B 需用 30 分钟，故可以生产

900 / 30 = 30

件产品 2。此时的净利润为

$45×100 + $60×30 - $5,000 = $1,300

这个结果显然比最初的$700 好，而且也是我们所能做到的最好了。但这种方法总是有效吗？

[7] 警觉的读者应对这种观点有所怀疑，因为我们知道多产品情形下“瓶颈”的位置可能依赖于产品组合。

线性规划方法（A Linear Programming Approach）。为了回答前面“瓶颈比率”方法是否总能决定最优的产品组合，我们考前面例子的一个修正版本，数据在表 16.2 中给出。不同之处是产品 2 在工站 B 的加工时间由 30 升到 35，产品 1 和 2 在工站 D 的加工时间分别从 15 和 5 升到 25 和 14。

表 16.2 修改后的单期 *AP* 例子的输入数据

产品	1	2
售价	$90	$100
原材料成本	$45	$40
周最大销售量	100	50
A工站每分钟产量	15	10
B工站每分钟产量	15	35
C工站每分钟产量	15	5
D工站每分钟产量	25	14

为了将基于比率的方法应用到这个修改后的问题，我们首先检查瓶颈：

工站 A　15（100）+ 10（50） = 2,000 分钟
工站 B　15（100）+ 35（50） = 3,250 分钟
工站 C　15（100）+ 5（50） = 1,750 分钟
工站 D　25（100）+ 14（50） = 3,200 分钟

工站 B 仍是负载最终的资源，但现在工站 D 也超出 2,400 分钟的可用时间了。

若指明工站 B 为瓶颈，则使用每分钟瓶颈时间的利润将是（550|551）
再次显示我们应当尽可能多地制造产品 1。然而，现在工站 D 对于产品 1 是最慢的。D 在 2,400 分钟内的最大产量是

$$2{,}400 / 25 = 96$$

96 件产品 1 耗尽工站 D 的可用时间，所以我们不能制造产品 2 了。这个组合的净利润就是

$$\$45\times 96 - \$5{,}000 = -\$680$$

看起来很不妙——我们在赔钱。还有，当出于计算比率的目的而使用工站 B 作为瓶颈时，却是工站 D 在决定我们究竟能制造多少产品。因此，似乎我们应当选择工站 D 作为瓶颈。这样，净利润与瓶颈时间的比率就是

加工产品 1　$45 / 25 = $1.80 /分钟
加工产品 2　$60 / 14 = $4.29 /分钟

这又指出加重产品 2 更能获利。这时工站 B 对于产品 2 是最慢的，所以我们检查它的产能看能生产多少产品 2，

$$2{,}400 / 35 = 68.57$$

这个值大于最大需求，所以我们应当生产 50 件的产品 2。各工站处未用的时间为

工站 A　2,400 - 10（50） = 1,900 分钟
工站 B　2,400 - 35（50） = 650 分钟
工站 C　2,400 - 5（50） = 2,150 分钟
工站 D　2,400 - 14（50） = 2,150 分钟

各工站的未用时间除以加工产品 1 的时间就是产品 1 在各处的最大产量

工站 A　1,900 / 15 = 126.67 件
工站 B　650 / 15 = 43.33 件

工站 C　2,150 / 15 = 143.33 件

工站 D　1,700 / 25 = 68 件

故而，工站 B 将产品 1 的产量限制在 43 件。这样，总利润为

$$\$45\times43 + \$60\times50 - \$5,000 = -\$65$$

这个好些了，但仍然在赔钱。这就是所能做到的最好吗？（551|552）

最后，让我们拿出利器，并用一个线性规划软件来求解问题。令 X_1、X_2 分别代表产品 1 和 2 的数量，我们建立在服从需求与产能约束下最大化利润的线性规划模型如下

最大化
$$45X_1 + 60X_2 - 5,000 \tag{16.33}$$

受限于:

$$X_1 \le 100 \tag{16.34}$$

$$X_2 \le 50 \tag{16.35}$$

$$15X_1 + 10X_2 \le 2,400 \tag{16.36}$$

$$15X_1 + 35X_2 \le 2,400 \tag{16.37}$$

$$15X_1 + 5X_2 \le 2,400 \tag{16.38}$$

$$25X_1 + 14X_2 \le 2,400 \tag{16.39}$$

问题(16.33)~(16.39)对任何 LP 软件来说都是小菜一碟。我们对这个问题的解的(Excel)报告是

最优目标值 = \$557.94

$$X_1^* = 75.79$$

$$X_2^* = 36.09$$

甚至在向下圆整（当然仍是产能可行的，因为这样还降低了产量）来得到整数值时

$$X_1^* = 75$$

$$X_2^* = 36$$

得到目标值

$$\$45\times75 + \$60\times36 - \$5,000 = -\$535$$

所以说尽可能多地制造产品 1 或者尽可能多地制造产品 2 都导致负的利润，而按照一个组合制造两种产品获得了正的利润！

这个练习的意思是，即使简单的产品组合问题也可能是微妙的。不使用选择主导产品或识别瓶颈的技巧也能找到最优解。那些技巧可能适用于某些特定问题，但它们可能给别的问题带来极劣的解。唯一可以确保最优地求解这些问题的，正是那些用于线性规划软件中的算法。在当今 LP 软件的速度、能力和用户友好性的帮助下，人们完全有理由将 LP 从近似方法（approximate method）中解脱出来。

16.3.3 基础模型的扩展

（16.28）~（16.32）式给出的基本模型有许多变种。我们在后面讨论其中的一些，而读者要在章末习题中考虑其他的类型。

其他的资源约束（Other Resource Constraints）。（16.28）~（16.32）式给出了工站的产能约束，但其他资源，如人员、原材料和运输设备都没有考虑。在某些系统中，这些可能是整体产能的重要决定条件，并因此要加入 AP 模块。（552|553）

一般地，如果令

b_{ij} = 每单位产品 i 所需资源 j 的数量

k_{jt} = 资源 j 在时期 t 的可用数量

X_{it} = 产品 i 在时期 t 的产量

我们可以描述资源 j 在时期 t 的能力约束为

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} X_{it} \le k_{jt} \qquad (16.40)$$

注意（16.28）~（16.32）式中 a_{ij} 和 c_{jt} 是关于工站的，而这里与之对应的的 b_{ij} 和 k_{jt} 则是关于资源的。

这里举一个例子，假设检验员需要检验产品 1、2、3，并分别需要 1、2、1.5 小时。如果该检验员每月有 160 小时的可用时间，则第 t 月对它的时间的限制就是

$$X_{1t} + 2X_{2t} + 1.5X_{3t} \le 160$$

如果这项约束在最优解中紧张，就意味着该检验员的时间是个瓶颈，并可能应当采取措施来缓解。（工厂可以为他提供帮助，简化检验程序来加速，或者通过工站作业员采用源头处的质量（quality-at-the-source）来消除对额外检验步骤的需要。）

第二个例子是，假设一家企业生产四种类型的电路板，每种都需要用到一个特殊的部件。而该部件包含了领先的技术，供应短缺。如果 k_t 表示时期 t 可得的此部件总数，则时期 t 的可得性约束就是

$$X_{1t} + X_{2t} + X_{3t} + X_{4t} \le k_t$$

许多其他的约束都可以按类似形式给出。

利用率匹配（Utilization Matching）。到目前的讨论都显示，以 LP 形式为 AP 问题的产能约束建模是很简单的事。然而，我们必须在实践中慎重对待如何使用这些约束，原因有两点。

1. 低层级复杂性（*Low-level complexity*）。AP 模块都会掩盖在短期引起低效率的原因。例如，在上一节产品组合的例子中，我们假定四台机器每周都运行 2,400 分钟。可是依据第

二篇的工厂物理学讨论，我们知道不可避免会有闲置时间。任何类型的随机性（机器故障、换模、排程过程中的偏差等等）都会降低利用率。尽管不能将这些直接整合入 AP 模块，我们还是能够处理它们对利用率的综合影响。

2. 生产控制决策（*Production control decisions*）。如在第十三章所见，设置生产定额在满量的平均产能之下常常很划算，因为这样既达到了预期的客户服务水平又没有过度的超时成本。如果定额设置模块要求以低于全部产能的速率运行，我们就应当在集结计划模块中反映这个实情以保持一致性。（553|554）

这些考虑使得计划生产水平低于满量产能很有吸引力。尽管决定与满量产能的贴近程度需要技巧，AP 模块中削减产能的机制很简单。若 c_{jt} 表示工站 j 在时期 t 满量产能的实际估值，排出了换模、作业员休息、机器故障及其他合理的扰动，我们就可以通过一个常数乘以这些值来紧缩产能。例如，若历史经验和定额设置模块都指出按全部产能的 q 来运行是合理的，我们就可以用下式替换 LP（16.28）~（16.32）中的（16.30）式

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_{it} \le q c_{jt} \qquad \text{对所有的 } j\text{、}t$$

其结果就是只要工站在某期负担 100q%的产能时，就会出现紧张的产能约束。

延迟（Backorders）。在 LP（16.28）~（16.32）中，我们强令库存在任何时间都保持正值。其中的隐含假设是需求或者由库存满足或者损失掉，而不能延期。然而许多现实情况是，没有按时满足的需求并没有损失。还有，必须要记得集结计划是一项长期计划职能。模型可能会说某个订单将要延期，实际却未必一定如此。如果预测的延迟发生在九个月之后，那么还有足够的时间来重新商定交期。这样看来，所谓需求实际上仅仅是个预测，并没有连上固定的客户交期。记住这一点，就可以将集结计划模块视为协调计划的需求与可用产能的一个工具。通过它识别出还在遥远未来的问题，我们就可以在时间还充足时将其解决。

可以轻易地修改 LP（16.28）~（16.32），使其允许延迟。形式如下：

$$\text{最大化} \quad \sum_{t=1}^{\bar{t}} r_i S_{it} - h_i I_{it}^{+} - \pi_i I_{it}^{-} \tag{16.41}$$

受限于:

$$\underline{d}_{it} \le S_{it} \le \bar{d}_{it} \qquad \text{对所有 } i, t \tag{16.42}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_{it} \le c_{jt} \qquad \text{对所有 } j, t \tag{16.43}$$

$$I_{it} = I_{it-1} + X_{it} - S_{it} \qquad \text{对所有 } i, t \tag{16.44}$$

$$I_{it} = I_{it}^{+} - I_{it}^{-} \qquad \text{对所有 } i, t \tag{16.45}$$

$$X_{it}, S_{it}, I_{it} \ge 0 \qquad \text{对所有 } i, t \tag{16.46}$$

主要的变化就是重新定义库存变量 I_{it} 为 I_{it}^{+} 与 I_{it}^{-} 的差值，其中 I_{it}^{+} 表示产品 i 从第 t 期送

至第 t+1 期的库存，I_{it}^- 表示从第 t 期送至第 t+1 期的延迟订单。I_{it}^+ 和 I_{it}^- 都必须非负。可是，I_{it} 可正可负，所以我们将其称为产品 i 在第 t 期的**库存量**（**inventory position**）。正的库存量表示库存持有量（on-hand inventory），而负的库存量表示显著的延迟。类似于 h_i 给出持有成本，系数 π_i 给出产品 i 延误一期的成本。由于 I_{it}^+ 和 I_{it}^- 以负的系数出现在目标函数中，LP Solver 将不会使它们在同一期中同时为正。这意味着我们不会在同一期中既递送库存又发生延迟惩罚。（554|555）

从建模的角度看，LP（16.41）~（16.46）中最麻烦的参数就是延迟补偿系数 π_i 了。一个单位的产品 i 延误一期的成本究竟是多少？对于这个问题，为什么延迟惩罚金额与延迟的时期或延迟的产品数量成线性关系？显然，即使是该组织中的人也很难回答关于这些数量的问题。因此我们应当将这类模型视为生成各种长期生产计划的工具。通过相对于 h_i 来提高或降低 π_i，分析人员可以提高或降低与延迟相关的惩罚。高 h_i 趋向于迫使模型建立库存来应对需求的激增，而低 h_i 趋向于允许模型晚些满足高峰时段的某些需求。通过生成这两种类型的计划，使用者就知道哪种是可行的，并做出选择。

要做到这一点，我们可以不必执着于成本系数的选择，而通过下面的简单等式来设定

$$h_i = \alpha p_i \tag{16.47}$$

$$\pi_i = \beta \tag{16.48}$$

其中 α 表示单期利率，是对过量库存引起无竞争力的周期时间的合适惩罚；p_i 表示的单位原材料成本，故 αp_i 表示持有一单位产品 i 库存所占用资金的利息损失。类似地，β 表示任何产品延迟一期的成本（很大程度上人为确定）。这里的假设是，延迟的真正成本（加速成本、损失客户好感、损失未来订单等等）不依赖于产品的成本或价格。如果有了（16.47）、（16.48）式，使用者就可以固定 α 变动 β 来生成多种不同的生产计划。

加班（**Overtime**）。前面关于产能的表达式都假设各工站在各时期有固定数量的时间可用。当然了，在许多系统中还有通过加班来增加这个时间的可能性。尽管我们将在接下来对劳力的讨论中更详尽地处理加班的问题，还是有必要快速指出在产品组合模型中插入加班是一件容易的事，即使是在劳力还没有清楚地考虑的情况下。

令

l_j' = 工站 j 一个小时的加班成本；它是个成本参数

O_{jt} = 工站 j 在时期 t 的加班小时数；它是一个决策变量

修改 LP（16.41）~（16.46）使其允许加班，形式如下：（555|556）

$$\text{最大化} \quad \sum_{t=1}^{\bar{t}}\left\{r_i S_{it} - h_i I_{it}^{+} - \pi_i I_{it}^{-} - \sum_{j=1}^{n} l_j^{'} O_{jt}\right\} \tag{16.49}$$

受限于:

$$\underline{d}_{it} \le S_{it} \le \bar{d}_{it} \qquad \text{对所有的 } i, t \tag{16.50}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_{it} \le c_{jt} + O_{jt} \qquad \text{对所有的 } j, t \tag{16.51}$$

$$I_{it} = I_{it-1} + X_{it} - S_{it} \qquad \text{对所有的 } i, t \tag{16.52}$$

$$I_{it} = I_{it}^{+} - I_{it}^{-} \qquad \text{对所有的 } i, t \tag{16.53}$$

$$X_{it}, S_{it}, I_{it}^{+}, I_{it}^{-} \ge 0 \qquad \text{对所有的 } i, j, t \tag{16.54}$$

对 LP（16.41）~（16.46）所做的两处改动是

1. 从目标函数中减去了工站 1, ..., n 的加班成本 $\sum_{t=1}^{\bar{t}}\sum_{j=1}^{n} l_j^{'} O_{jt}$ 。

2. 在约束（16.51）中向该资源的产能 c_{jt} 加入了计划的工站 j 在时期 t 的加班时间 O_{jt} 。

将延迟和加班放入同一个模型是很自然的事，因为它们正是解决产能问题的两条途径。在 LP（16.49）~（16.54）中，计算机可以选择晚期满足需求（延迟）或者通过加班来提升产能。它选择的具体组合则取决于延迟与加班的成本比较（π_i 与 $l_j^{'}$）。通过改变这些成本系数，使用者可以生成一系列的生产计划。

产出损失（Yield Loss）。在产品在产线各处都有因质量问题出现报废的系统中，我们必须在开始时投入额外的物料来补偿这些损失。结果就是产出损失点上游工站比没有损失情况下的负载要重（因为它们还要加工最终报废掉的额外物料）。因此，要想准确了解特定需求对产能的可行性，当存在报废时我们必须在集结计划模块中考虑产出损失。

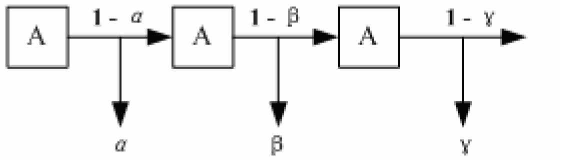

图 16.9 三工站产线的产出损失

我们通过图 16.9 描述产出损失的基本效果。在这条简单的产线中，α 、β 、 γ 分别表

示工站 A、B、C 处的报废比例。如果要从工站 C 处获得 d 件产品，则平均地，我们要向工站 C 投入 $d/(1-\gamma)$ 件。要从工站 B 处获得 $d/(1-\gamma)$ 件，我们要向工站 B 投入 $d/[(1-\beta)(1-\gamma)]$ 件。最后，要从 A 处获得 $d/[(1-\beta)(1-\gamma)]$ 件，就要向 A 投入 $d/[(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)]$ 件。

可以通过如下的定义总结图 16.9 给出的具体例子

y_{ij} = 产品 i 从工站 j 以上（包括工站 j）的累积产出概率

如果希望从产线尾平均获得 d 件产品，就必须向工站 j 投放

$$\frac{d}{y_{ij}} \tag{16.55}$$

件。这些值能容易地以图 16.9 的方式计算，并通过电子表格或数据库来更新。

按图 16.9 的原理使用（16.55）式来调整产量，我们就可以修正 LP（16.28）~（16.32）来考虑产出损失，形式如下：（556|557）

最大化 $$\sum_{t=1}^{\bar{t}} r_i S_{it} - h_i I_{it} \tag{16.56}$$

受限于：

$$\underline{d}_{it} \le S_{it} \le \bar{d}_{it} \quad \text{对所有的 } i, t \tag{16.57}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij} X_{it}}{y_{ij}} \le c_{jt} \quad \text{对所有的 } j, t \tag{16.58}$$

$$I_{it} = I_{it-1} + X_{it} - S_{it} \quad \text{对所有的 } i, t \tag{16.59}$$

$$X_{it}, S_{it}, I_{it} \ge 0 \quad \text{对所有的 } i, t \tag{16.60}$$

如人们可以预见的那样，这种变化的净效果就是降低了各工站，尤其是线首工站的有效产能。通过改变 y_{ij} 的值（或者再好不过地是组成 y_{ij} 的各个产出），计划者可以获取对系统产出改善的敏感性的直观了解。再如可以直观想到的那样，削减向线尾的报废率的效果常常大于削减向线首的。很明显，产品在过程晚期报废的成本巨大，所以要尽可能地避免。如果线首处更好的过程控制和质量保证能削减之后的报废，它就是一项好政策。类似 LP（16.56）~（16.60）中给出的集结计划模块提供了一种理解这类政策的经济与物流影响的途径。

16.4 劳力计划

对于劳力负载因不定的劳力规模或加班而变化的系统，有必要一前一后地考虑集结计划（AP）与劳力计划（MP）模块。关于如何以及何时重订劳力规模与是否要用加班替代新雇劳力的问题，可置于线性规划表达式的背景中来支持上面两个模块。

16.4.1 一个 LP 模型

为了说明 LP 模型如何解决重订劳力规模或加班配置等问题，我们将考虑一个简单的单产品模型。在产品路线和加工时间二者有一个是几乎相同的系统中，多产品可以综合归入单一产品或完全分离，故各路线可以独立分析，这时单产品模型就是合理的。在瓶颈识别被不同的加工时间和互联的路线复杂化的系统中，计划者最需要的是一个明确的多产品模型。它要将前面讨论的简单产品组合模型与后面提到的劳力计划模型整合。

我们沿用了前面的记号，并增添了一些新的，来说明劳力计划问题。

j = 工站编号， $j = 1, \ldots, n$，故 n 是工站总数

i = 时期编号，$i = 1, \ldots, \bar{t}$，故 $\bar{t}$ 是计划展望期（557|558）

$\bar{d}_t$ = 时期 t 的最大需求

$\underline{d}_t$ = 时期 t 允许的最小销量

a_j = 工站 j 生产一单位产品所需要的时间

b = 制造单位产品所需的劳力工时

c_{jt} = 工站 j 在时期 t 的产能

r = 销售每单位产品的净利润

h = 产品的单位时间持有成本

l = 正常情况下单位工时的成本

l' = 加班情况下单位工时的成本

e = 每期增加一单位劳力工时的成本

e' = 每期增加一单位劳力工时的成本

X_t = 产品在时期 t 的产量

S_t = 产品在时期 t 的销量

I_t = 产品在时期 t 末的库存量（I_0 已给出）

W_t = 正常情况下时期 t 的劳力工时；假设 W_0 已给出

H_t = 时期 t-1 到时期 t 新增的劳力工时数

F_t = 时期 t-1 到时期 t 减少的劳力工时数

O_t = 时期 t 的加班时间

这样就有几个新的参数和决策变量来表示劳力问题。首先，我们需要单位产品包含的劳力工时 b，来将劳力需求与产量需求联系起来。一旦模型使用了这个参数来决定某月所需的劳力工时，就有两种满足的方式。或者可以计划加班，使用变量 O_t 并以 $l_t^{'}$ 发生成本；或者重订劳力规模，使用变量 H_t 和 F_t 并以 e（$e^{'}$）发生新增（解雇）成本。

为了将这个计划问题表述为 LP 形式，我们需要假设劳力新增或解雇的成本与变化的数量成线性关系；也即，新增（解雇）两名工人的成本是一名工人的两倍。这里我们假设 e 是与引进一名新工人相关的雇佣、培训、配备、低生产力损失的总估值；类似的，$e^{'}$ 是与让一名工人离开相关的遣散费、失业支付等的总估值。

当然了，实际上这些劳力相关的成本并非线性。群体培训时的单位成本低于单个时的成本，因为教员一次培训许多工人的成本差不多与培训一名的相同。另一方面，引进许多新工人造成的工厂扰动与生产力下降比引进一个严重得多。尽管可以使用更精巧的模型来考虑此类非线性，我们还是坚持 LP 模型，并牢记研究的是一般效应而非细枝末节。考虑到 AP 和 WP 模块用于长期计划的目的，依赖于预测的数据（如，未来的需求），它可能是大多数实际应用的合理选择。

在销量和产能约束下最大化包括劳力、加班、持有库存和雇佣/解雇成本的净利润的 LP 表达式为（558|559）

最大化 $$\sum_{t=1}^{\bar{t}} \left\{ r_i S_{it} - h_i I_{it} - lW_t - l^{'} O_t - eH_t - e^{'} F_t \right\} \qquad (16.61)$$

受限于:

$$\underline{d}_t \le S_t \le \bar{d}_t \qquad \text{对所有的 } t \qquad (16.62)$$

$$a_j X_t \le c_{jt} \qquad \text{对所有的 } j, t \qquad (16.63)$$

$$I_t = I_{t-1} + X_t - S_t \qquad \text{对所有的 } t \qquad (16.64)$$

$$W_t = W_{t-1} + H_t - F_t \qquad \text{对所有的 } t \qquad (16.65)$$

$$bX_t \le W_t + O_t \qquad \text{对所有的 } t \qquad (16.66)$$

$$X_t, S_t, I_t, O_t, W_t, H_t, F_t \ge 0 \qquad \text{对所有的 } t \qquad (16.67)$$

（16.61）式的目标函数计算的是净收益与库存持有成本、工资（常规的和加班的）以及劳力增/减成本之间的差值。（16.62）式是对销量的一般限制。（16.63）式是对各工站的产能限制。（16.63）式是一般的库存平衡方程。（16.65）、（16.66）式是新面孔，（16.65）定义 W_t 以劳力工时的形式表示时期 t 的劳力规模，而（16.66）约束了生产 X_t 件产品所需的劳力工时等于或小于常规时间与加班时间之和。最后，（16.67）式保证产量、销量、库存、加班、劳力规模与劳力增/减量都非负。$I_t \ge 0$ 意味着没有延迟，但我们可用像 LP（16.41）~（16.46）

那样的方式修改这个模型来引入延迟。

16.4.2 一个联合 AP/WP 的例子

为了使 LP（16.61）~（16.67）更加直观并使建模、分析以及决策制定的互动方式更加有趣，我们来看图 16.10 中电子表格给出的实例。它是一个计划展望期为 12 个月，单位净收益为$1,000 的单产品问题。我们假设在期初有 15 名工人，每人每月工作 168 小时。因此，在问题之初可用的总劳力工时数目是

$$W_0 = 15 \times 68 = 2,520$$

开始时无库存，故 $I_0 = 0$。

成本参数估计如下。每月的持有成本是每件$10。常规劳力成本是每小时$35。加班按一倍半支付，就是$52.50。招聘和培训一名新工人需要$2,500。由于这名工人对应于每月 168 小时，这笔成本按每小时的金钱计就是

$$\frac{\$2,500}{168} = \$14.88 \approx \$15/\text{小时}$$

这个值仅仅是个粗略近似，所以我们将其圆整到$15。类似地，我们估计解雇一名工人的成本约为$1,500，故按每小时的金钱计就是（559|560）

$$\frac{\$1,500}{168} = \$8.93 \approx \$9/\text{小时}$$

再一次地，我们使用$9 的圆整值，因为这个数据也是粗略的。（560|561）

常量：

r	1000											
h	10											
l	35											
I'	52.5											
e	15											
e'	9											
b	12											
I_0	0											
W_0	2520											
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_t	200	220	230	300	400	450	320	180	170	170	160	180

决策变量：

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Xt	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Wt	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ht	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ft	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
It	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ot	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

目标函数：

净利润： $2,980,600.00

约束：

I1-I0-X1	0.00	=	-200	**-d_1**
I2-I1-X2	0.00	=	-220	**-d_2**
I3-I2-X3	0.00	=	-230	**-d_3**
I4-I3-X4	0.00	=	-300	**-d_4**
I5-I4-X4	0.00	=	-400	**-d_5**
I6-I5-X6	0.00	=	-450	**-d_6**
I7-I6-X7	0.00	=	-320	**-d_7**
I8-I7-X8	0.00	=	-180	**-d_8**
I9-I8-X9	0.00	=	-170	**-d_9**
I10-I9-X10	0.00	=	-170	**-d_10**
I11-I10-X11	0.00	=	-160	**-d_11**
I12-I11-X12	0.00	=	-180	**-d_12**
W1-W0-H1+F1	-2520.00	=	0	
W2-W1-H2+F2	0.00	=	0	
W3-W2-H3+F3	0.00	=	0	
W4-W3-H4+F4	0.00	=	0	
W5-W4-H5+F5	0.00	=	0	
W6-W5-H6+F6	0.00	=	0	
W7-W6-H7+F7	0.00	=	0	
W8-W7-H8+F8	0.00	=	0	
W9-W8-H9+F9	0.00	=	0	
W10-W9-H10+F10	0.00	=	0	
W11-W10-H11+F11	0.00	=	0	
W12-W11-H12+F12	0.00	=	0	
bX1-W1-01	0.00	<=	0	
bX2-W2-02	0.00	<=	0	
bX3-W3-03	0.00	<=	0	
bX4-W4-04	0.00	<=	0	
bX5-W5-05	0.00	<=	0	
bX6-W6-06	0.00	<=	0	
bX7-W7-07	0.00	<=	0	
bX8-W8-08	0.00	<=	0	
bX9-W9-09	0.00	<=	0	
bX10-W10-010	0.00	<=	0	
bX11-W11-011	0.00	<=	0	
bX12-W12-012	0.00	<=	0	

注释：所有的决策变量必须>=0

图 16.10 劳力计划示例的原始表格

注意电子表格中计划的需求（d_t）有季节特性，在五月和六月达到高峰，之后又降到平稳。我们假设延迟不是可选的项目，需求必须被满足，所以主要的议题就是如何做到这一点。

让我们在这个问题中将 LP（16.61）~（16.67）展开为具体的表达式。因为假设了需求被满足，我们设定$S_t = d_t$，这样也消除了对独立销售变量S_t和销售约束（16.62）的需要。还有，出于简化的目的，我们假设唯一的产能约束来自于人力（即，需要 12 小时的劳力工时来生产一单位产品），而没有其他的机器或资源约束要考虑，这样就能忽略约束（16.63）。在以上的假设下，得到的 LP 表达式就是（561|562）

$$\text{最大化}\quad \begin{aligned}&1{,}000(d_1+\cdots+d_{12})-10(I_1+\cdots+I_{12})\\&-35(W_1+\cdots+W_{12})-52.5(O_1+\cdots+O_{12})\\&-15(H_1+\cdots+H_{12})-9(F_1+\cdots+F_{12})\end{aligned} \tag{16.68}$$

受限于:

$$I_1 - I_0 - X_1 = -d_1 \tag{16.69}$$

$$I_2 - I_1 - X_2 = -d_2 \tag{16.70}$$

$$I_3 - I_2 - X_3 = -d_3 \tag{16.71}$$

$$I_4 - I_3 - X_4 = -d_4 \tag{16.72}$$

$$I_5 - I_4 - X_5 = -d_5 \tag{16.73}$$

$$I_6 - I_5 - X_6 = -d_6 \tag{16.74}$$

$$I_7 - I_6 - X_7 = -d_7 \tag{16.75}$$

$$I_8 - I_7 - X_8 = -d_8 \tag{16.76}$$

$$I_9 - I_8 - X_9 = -d_9 \tag{16.77}$$

$$I_{10} - I_9 - X_{10} = -d_{10} \tag{16.78}$$

$$I_{11} - I_{10} - X_{11} = -d_{11} \tag{16.79}$$

$$I_{12} - I_{11} - X_{12} = -d_{12} \tag{16.80}$$

$$W_1 - H_1 + F_1 = 2{,}520 \tag{16.81}$$

$$W_2 - W_1 - H_2 + F_2 = 0 \tag{16.82}$$

$$W_3 - W_2 - H_3 + F_3 = 0 \tag{16. 83}$$

$$W_4 - W_3 - H_4 + F_4 = 0 \tag{16.84}$$

$$W_5 - W_4 - H_5 + F_5 = 0 \tag{16.85}$$

$$W_6 - W_5 - H_6 + F_6 = 0 \tag{16.86}$$

$$W_7 - W_6 - H_7 + F_7 = 0 \tag{16.87}$$

$$W_8 - W_7 - H_8 + F_8 = 0 \tag{16.88}$$

$$W_9 - W_8 - H_9 + F_9 = 0 \tag{16.89}$$

$$W_{10} - W_9 - H_{10} + F_{10} = 0 \tag{16.90}$$

$$W_{11} - W_{10} - H_{11} + F_{11} = 0 \tag{16.91}$$

$$W_{12} - W_{11} - H_{12} + F_{12} = 0 \tag{16.92}$$

$$12X_1 - W_1 - O_1 = 0 \tag{16.93}$$

$$12X_2 - W_2 - O_2 = 0 \tag{16.94}$$

$$12X_3 - W_3 - O_3 = 0 \tag{16.95}$$

$$12X_4 - W_4 - O_4 = 0 \tag{16.96}$$

$$12X_5 - W_5 - O_5 = 0 \tag{16.97}$$

$$12X_6 - W_6 - O_6 = 0 \tag{16.98}$$

$$12X_7 - W_7 - O_7 = 0 \tag{16.99}$$

$$12X_8 - W_8 - O_8 = 0 \tag{16.100}$$

$$12X_9 - W_9 - O_9 = 0 \tag{16.101}$$

$$12X_{10} - W_{10} - O_{10} = 0 \tag{16.102}$$

$$12X_{11} - W_{11} - O_{11} = 0 \tag{16.103}$$

$$12X_{12} - W_{12} - O_{12} = 0 \tag{16.104}$$

$$X_t, I_t, O_t, W_t, H_t, F_t \geq 0 \quad t = 1, ..., 12 \tag{16.105}$$

除了 S_t 被 d_t 替代[8]之外，目标函数（16.68）与（16.61）完全相同。约束（16.69）~（16.80）是常规的平衡约束。例如，（16.69）简单地陈述

$$I_1 = I_0 + X_1 - d_1$$

意思是，一月末的库存等于零月末（即，问题的初始）的库存假设一月的产量，减去一月的销量（需求量）。我们已经将这些约束变形，使得所有的决策变量都在左侧而约束（ d_t ）都在右侧。这是一个方便的建模惯例，如我们将在以后的分析所见。

约束（16.81）~（16.92）是通式（16.65）给出的劳力平衡方程。例如，（16.81）表示

$$W_1 = W_0 + H_1 - F_1$$

故一月末的劳力（以劳力小时计）等于零月末的加上一月的增量，减去一月中任何的减量。

约束（16.93）~（16.104）保证生产计划的劳力需求不超过包括加班在内的可用劳力。例如，（16.93）可以写作

$$12X_1 \le W_1 + O_1$$

在图 16.10 所示的电子表格中，我们已在单元格 B16:M21 中输入了决策变量 X_t 、W_t 、H_t 、F_t 、I_t 和 O_t 。使用这些变量以及电子表格顶端的各种系数，我们在单元格 B24 中给出目标函数（16.68）。注意到这个公式报告了一个值，它等于单位利润乘以总需求，即

$$1{,}000(200+220+230+300+400+450+320+180+170+170+160+180) = \$2{,}980{,}000$$

这是因为决策变量都为零时，目标函数的所有其他项都等于零。（562|563）

我们将约束（16.69）~（16.80）的左侧输入 B27:B38，约束（16.81）~（16.92）的左侧输入 B39:B50，约束（16.93）~（16.104）的左侧输入 B51:B62。注意到所有决策变量都等于零时，这些约束中的许多都无法满足。这并不奇怪，因为我们不能期待从尚未生产的产品获取收益。

用电子表格求解 LP 模型的便利之一是，它提供一种试算模型来深入探察其行为的机制。例如，在图 16.11 给出的电子表格我们试验了一种**追逐策略（chase solution）**，将产量设置等于需求（ $X_t = d_t$ ）并使各期的 $W_t = W_0$ 。它可以满足单元格 B27:B38 的库存平衡约束与单元格 B39:B50 的人力平衡约束，却违背了单元格 B52:B57 人力工时约束。其原因，就是当前的人力不足以在不加班的情况下满足需求。我们可以通过调整 B21:M21 的 O_t 变量来引入加班。然而，手工寻求最优解可能很困难，尤其对于大规模的模型。因此，我们将用 LP Solver 进行这项工作。

使用先前讲到的程序，我们将模型约束（16.69）~（16.105）输入计算机进行运算。结果是如图 16.12 所示的电子表格。基于选择的成本参数，最优解是不使用任何加班。（加班成本为每月$52.5 - 35 = $15.50/小时，而新聘成本仅为一次性花费$15/小时。）事实上，模型加入了 1,114.29 小时的劳力，即

1,114.29 / 168 = 6.6

---

[8] 由于 d_t 值已经给出，目标函数的第一项并不是决策变量的函数故可以移出而不影响最优解。我们将其保留，是为了使模型表达的利润函数容易理解。

名新工人。在高峰期四至七月之后，最优解又裁减了 1,474.29 + 120 = 1,594.29 小时，这意味着解雇

$$1{,}594.29 / 168 = 9.5$$

名工人。还有，这个解在一至四月建立库存并用于满足五至七月的需求高峰。这个解的净利润为$1,687,337.14。

从管理的角度看，八月和九月的裁员将是个问题。尽管对于这些员工有具体的补偿，但补偿往往是臆想的，并没有准确考虑招募与解雇在员工伦理、生产力与企业留住好员工能力上的长期影响。因此，似乎还要做进一步的分析。

值得考虑的一种途径就是让模型只招聘而不裁员。可以移除变量 F_t，或考虑电子表格的扩展应用而以如下形式设置约束

$$F_t = 0 \qquad t = 1, ..., 12$$

带着这个额外约束重新运行模型，生产图 16.13 所示的电子表格。如预期一样，此时的解没有任何裁员。但有些奇怪的是，它也没有引入任何新员工（即，各期的 $H_t = 0$）。模型选择在三至七月加班，而非增大劳力规模。很明显地，如果不能解雇工人，招进额外的工人也是不经济的。（563|564）

然而，仔细检视图 16.13 的解时，就会发现一个问题。加班时间相当长。例如，六月的加班时间比常规时间还长！这意味着 15 名工人该月加班 2,880/15 = 192 小时，或是每周加班约 48 小时。这显然是过量的。（564|565）

消除这个加班问题的一种方法是在增添一些约束。例如，可以指定加班不能超过常规时间的 20%。这样就可以在一般每周五天的工作时间内加入一整天。约束的形式可以是

$$O_t \le 0.2W_t \qquad (16.106)$$

在图 16.13 的电子表格中加入约束，得到图 16.14 所示的结果。（565|566）对加班的限制迫使系统雇佣新工人。由于仍然不允许解雇，模型仅增加了 508.57 小时的人力，即（566|567）

$$508.57 / 168 = 3$$

名新工人，而图 16.12 中的原始解要雇佣 6.6 名工人。为了达到必要的产量，这个解在一至七月都安排加班。注意到此时的加班工时数正好等于常规时间的 20%，即（567|568）

$$3{,}028.57 \times 0.2 = 605.71$$

它的意思是新约束（16.106）对于一月到七月是紧张的，若打印出 LP Solver 生成的敏感性报告就可以清楚的看到这个结论。这也暗示着如果可能在这些月间多加班，就可以改进这个解。

注意到图 16.14 所示电子表格的净利润为$1,467,871.43，比图 16.12 的原始最优解$1,687,337.14 低 13%。乍看上去，似乎不准裁员和限制加班的代价昂贵。而另一方面，它实际上指出我们对招募和解雇成本的初始估计太低了。如果我们要提高这些成本来表示，比如说劳力变动带来的长期扰动，最接解就可能非常接近图 16.14 中的值。

常量：

r	1000											
h	10											
l	35											
I'	52.5											
e	15											
e'	9											
b	12											
I_0	0											
W_0	2520											
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_t	200	220	230	300	400	450	320	180	170	170	160	180

决策变量：

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Xt	200.00	220.00	230.00	300.00	400.00	450.00	320.00	180.00	170.00	170.00	160.00	180.00
Wt	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00
Ht	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ft	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
It	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ot	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

目标函数：

净利润：	$1,921,600.00

约束：

I1-I0-X1	-200.00	=	-200	**-d_1**
I2-I1-X2	-220.00	=	-220	**-d_2**
I3-I2-X3	-230.00	=	-230	**-d_3**
I4-I3-X4	-300.00	=	-300	**-d_4**
I5-I4-X4	-400.00	=	-400	**-d_5**
I6-I5-X6	-450.00	=	-450	**-d_6**
I7-I6-X7	-320.00	=	-320	**-d_7**
I8-I7-X8	-180.00	=	-180	**-d_8**
I9-I8-X9	-170.00	=	-170	**-d_9**
I10-I9-X10	-170.00	=	-170	**-d_10**
I11-I10-X11	-160.00	=	-160	**-d_11**
I12-I11-X12	-180.00	=	-180	**-d_12**
W1-W0-H1+F1	0.00	=	0	
W2-W1-H2+F2	0.00	=	0	
W3-W2-H3+F3	0.00	=	0	
W4-W3-H4+F4	0.00	=	0	
W5-W4-H5+F5	0.00	=	0	
W6-W5-H6+F6	0.00	=	0	
W7-W6-H7+F7	0.00	=	0	
W8-W7-H8+F8	0.00	=	0	
W9-W8-H9+F9	0.00	=	0	
W10-W9-H10+F10	0.00	=	0	
W11-W10-H11+F11	0.00	=	0	
W12-W11-H12+F12	0.00	=	0	
bX1-W1-O1	-120.00	<=	0	
bX2-W2-O2	120.00	<=	0	
bX3-W3-O3	240.00	<=	0	
bX4-W4-O4	1080.00	<=	0	
bX5-W5-O5	2280.00	<=	0	
bX6-W6-O6	2880.00	<=	0	
bX7-W7-O7	1320.00	<=	0	
bX8-W8-O8	-360.00	<=	0	
bX9-W9-O9	-480.00	<=	0	
bX10-W10-O10	-480.00	<=	0	
bX11-W11-O11	-600.00	<=	0	
bX12-W12-O12	-360.00	<=	0	

注释：所有的决策变量必须>=0

图 16.11 不可行的“追逐策略”

常量：

r	1000											
h	10											
l	35											
I'	52.5											
e	15											
e'	9											
b	12											
I_0	0											
W_0	2520											
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_t	200	220	230	300	400	450	320	180	170	170	160	180

决策变量：

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Xt	302.86	302.86	302.86	302.86	302.86	302.86	302.86	180.00	170.00	170.00	170.00	170.00
Wt	3634.29	3634.29	3634.29	3634.29	3634.29	3634.29	3634.29	2160.00	2040.00	2040.00	2040.00	2040.00
Ht	1114.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ft	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1474.29	120.00	0.00	0.00	0.00
It	102.86	185.71	258.57	261.43	164.29	17.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ot	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

目标函数：

净利润： $1,687,337.14

约束：

I1-I0-X1	-200.00	=	-200	**-d_1**
I2-I1-X2	-220.00	=	-220	**-d_2**
I3-I2-X3	-230.00	=	-230	**-d_3**
I4-I3-X4	-300.00	=	-300	**-d_4**
I5-I4-X4	-400.00	=	-400	**-d_5**
I6-I5-X6	-450.00	=	-450	**-d_6**
I7-I6-X7	-320.00	=	-320	**-d_7**
I8-I7-X8	-180.00	=	-180	**-d_8**
I9-I8-X9	-170.00	=	-170	**-d_9**
I10-I9-X10	-170.00	=	-170	**-d_10**
I11-I10-X11	-160.00	=	-160	**-d_11**
I12-I11-X12	-180.00	=	-180	**-d_12**
W1-W0-H1+F1	0.00	=	0	
W2-W1-H2+F2	0.00	=	0	
W3-W2-H3+F3	0.00	=	0	
W4-W3-H4+F4	0.00	=	0	
W5-W4-H5+F5	0.00	=	0	
W6-W5-H6+F6	0.00	=	0	
W7-W6-H7+F7	0.00	=	0	
W8-W7-H8+F8	0.00	=	0	
W9-W8-H9+F9	0.00	=	0	
W10-W9-H10+F10	0.00	=	0	
W11-W10-H11+F11	0.00	=	0	
W12-W11-H12+F12	0.00	=	0	
bX1-W1-01	0.00	<=	0	
bX2-W2-02	0.00	<=	0	
bX3-W3-03	0.00	<=	0	
bX4-W4-04	0.00	<=	0	
bX5-W5-05	0.00	<=	0	
bX6-W6-06	0.00	<=	0	
bX7-W7-07	0.00	<=	0	
bX8-W8-08	0.00	<=	0	
bX9-W9-09	0.00	<=	0	
bX10-W10-010	0.00	<=	0	
bX11-W11-011	0.00	<=	0	
bX12-W12-012	0.00	<=	0	

注释：所有的决策变量必须>=0

图 16.12 *LP* 最优解

常量：

r	1000											
h	10											
l	35											
I'	52.5											
e	15											
e'	9											
b	12											
I_0	0											
W_0	2520											
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_t	200	220	230	300	400	450	320	180	170	170	160	180

决策变量：

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Xt	210.00	210.00	230.00	300.00	400.00	450.00	320.00	180.00	170.00	170.00	160.00	180.00
Wt	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00	2520.00
Ht	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ft	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
It	10.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ot	0.00	0.00	240.00	1070.00	2280.00	2880.00	1320.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

目标函数：

净利润：	$1,512,000.00

约束：

I1-I0-X1	−200.00	=	−200	**-d_1**
I2-I1-X2	−220.00	=	−220	**-d_2**
I3-I2-X3	−230.00	=	−230	**-d_3**
I4-I3-X4	−300.00	=	−300	**-d_4**
I5-I4-X4	−400.00	=	−400	**-d_5**
I6-I5-X6	−450.00	=	−450	**-d_6**
I7-I6-X7	−320.00	=	−320	**-d_7**
I8-I7-X8	−180.00	=	−180	**-d_8**
I9-I8-X9	−170.00	=	−170	**-d_9**
I10-I9-X10	−170.00	=	−170	**-d_10**
I11-I10-X11	−160.00	=	−160	**-d_11**
I12-I11-X12	−180.00	=	−180	**-d_12**
W1-W0-H1+F1	0.00	=	0	
W2-W1-H2+F2	0.00	=	0	
W3-W2-H3+F3	0.00	=	0	
W4-W3-H4+F4	0.00	=	0	
W5-W4-H5+F5	0.00	=	0	
W6-W5-H6+F6	0.00	=	0	
W7-W6-H7+F7	0.00	=	0	
W8-W7-H8+F8	0.00	=	0	
W9-W8-H9+F9	0.00	=	0	
W10-W9-H10+F10	0.00	=	0	
W11-W10-H11+F11	0.00	=	0	
W12-W11-H12+F12	0.00	=	0	
bX1-W1-01	0.00	<=	0	
bX2-W2-02	0.00	<=	0	
bX3-W3-03	0.00	<=	0	
bX4-W4-04	0.00	<=	0	
bX5-W5-05	0.00	<=	0	
bX6-W6-06	0.00	<=	0	
bX7-W7-07	0.00	<=	0	
bX8-W8-08	−360.00	<=	0	
bX9-W9-09	−480.00	<=	0	
bX10-W10-010	−480.00	<=	0	
bX11-W11-011	−600.00	<=	0	
bX12-W12-012	−360.00	<=	0	

注释：所有的决策变量必须>=0

图 16.13 $F_t = 0$ 时的最优解

常量：

r	1000											
h	10											
l	35											
I'	52.5											
e	15											
e'	9											
b	12											
I_0	0											
W_0	2520											
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_t	200	220	230	300	400	450	320	180	170	170	160	180

决策变量：

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Xt	302.86	302.86	302.86	302.86	302.86	302.86	302.86	180.00	170.00	170.00	160.00	180.00
Wt	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57	3028.57
Ht	508.57	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ft	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
It	102.86	185.71	258.57	261.43	164.29	17.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ot	605.71	605.71	605.71	605.71	605.71	605.71	605.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

目标函数：

净利润： $1,467,871.43

约束：

I1-I0-X1	-200.00	=	-200	**-d_1**
I2-I1-X2	-220.00	=	-220	**-d_2**
I3-I2-X3	-230.00	=	-230	**-d_3**
I4-I3-X4	-300.00	=	-300	**-d_4**
I5-I4-X4	-400.00	=	-400	**-d_5**
I6-I5-X6	-450.00	=	-450	**-d_6**
I7-I6-X7	-320.00	=	-320	**-d_7**
I8-I7-X8	-180.00	=	-180	**-d_8**
I9-I8-X9	-170.00	=	-170	**-d_9**
I10-I9-X10	-170.00	=	-170	**-d_10**
I11-I10-X11	-160.00	=	-160	**-d_11**
I12-I11-X12	-180.00	=	-180	**-d_12**
W1-W0-H1+F1	0.00	=	0	
W2-W1-H2+F2	0.00	=	0	
W3-W2-H3+F3	0.00	=	0	
W4-W3-H4+F4	0.00	=	0	
W5-W4-H5+F5	0.00	=	0	
W6-W5-H6+F6	0.00	=	0	
W7-W6-H7+F7	0.00	=	0	
W8-W7-H8+F8	0.00	=	0	
W9-W8-H9+F9	0.00	=	0	
W10-W9-H10+F10	0.00	=	0	
W11-W10-H11+F11	0.00	=	0	
W12-W11-H12+F12	0.00	=	0	
bX1-W1-01	0.00	<=	0	
bX2-W2-02	0.00	<=	0	
bX3-W3-03	0.00	<=	0	
bX4-W4-04	0.00	<=	0	
bX5-W5-05	0.00	<=	0	
bX6-W6-06	0.00	<=	0	
bX7-W7-07	0.00	<=	0	
bX8-W8-08	-868.57	<=	0	
bX9-W9-09	-988.57	<=	0	
bX10-W10-010	-988.57	<=	0	
bX11-W11-011	-1108.57	<=	0	
bX12-W12-012	-868.57	<=	0	

注释：所有的决策变量必须>=0

图 16.14 $F_t = 0$、$O_t \le 0.2W_t$ 时的最优解

16.4.3 建模心得

除了给出一个 LP（16.61）~（16.67）形式的具体劳力计划示例，我们还希望读者能理解用优化模型作为 AP 或 WP 模块基础时的以下结论。

1. *多种建模途径*（*Multiple modeling approaches*）。为给定问题构模的途径常常有很多种，没有绝对意义上的“正确”之说。关键是使用成本系数和约束来以合适的方式表示主要问题。在这个例子中，我们就生成了无裁员时的解，途径之一是提高裁员补偿，途径之二是对裁员设置限制。它们两种都实现了同样的数量结果。

2. *迭代式建模*（*Interative model development*）。构模和分析几乎从没有过一次就建立表达式、求解与整合的理想方式。一个版本的解常常引出修改版的模型。例如，我们原本不知道取消裁员会导致解的加班过量。看到图 16.13 的电子表格之后，我们才意识到需要限制加班水平。

16.5 结论

在这一章里，我们纵览了集结计划与劳力计划中的问题。我们方法背后的一个重要假定是，由于集结计划和劳力计划模块使用很长的计划展望期，精确的数据或灵巧的建模细节是不实际或不可能的。我们必须认识到这些模块生成的生产或劳力计划要随时间而调整。PPC 的低层级必须应对将计划转变为行动的各种挑战。良好 AP 模块的关键在于保持对长期计划的关注（即，避免将过多的短期控制细节放入模型）以及提供与其他模块的连接从而保持层级一致性。与一致性相关的部分议题已在第十三章中讨论过。这里，我们以一些关于集结计划与劳力计划功能的一般观点来结束本章：

1. *没有任何一种 AP 或 WP 模块适合于所有情况*。如本章的例子所示，集结计划与劳力计划与多种不同的决策问题相关。好的 AP 或 WP 模块定制于解决企业所面对的具体问题。（568|569）

2. *简单则易于理解*（*Simplicity promotes understanding*）。人们很想在 AP/WP 模块中解决不同的问题，但更重要的还是保持模型可理解性。一般来说，这些模块用于生成候选的生产和劳力计划，然后经过人工检验、合并与修改，最后才发布为“计划”。要生成一系列的计划（并向他人解释），使用者必须能追踪模型的变动从而改变计划。为此，很必要始于一个尽可能简单的模型。其他的细节（如，约束）可以在稍后添加。

3. *线性规划是个有用的 AP/WP 工具*。集结计划和劳力计划所用的长计划展望期忽略了许多生产细节；因此，产能核算、销量限制与库存平衡都可以表达为线性约束。只要我们愿意用线性函数近似表示实际成本，LP Solver 就是一种求解许多与 AP 和 WP 模块相关问题的高效方法。由于我们使用了预测的长期数据，大多数集结计划与劳力计划情形就不适用比 LP 更精巧的方法（如，非线性或整数规划）。

4. *稳健比精确重要*（*Robustness matters much than precision*）。不管数据多么精确模型多么精巧，AP 或 WP 模块生成的计划都不会被严格执行。实际的生产序列将被未能预见的事件影响，而这些事件不可能已经整合进入模型。这就意味着一个好的长期生产计划的标志是，它能使我们即便面临此类变动也能运行良好。要找到这样的计划，AP 模块的使用者必须能检视各种假设的后果。这也是要保持模型简单的另外一个原因。

附录 16A 线性规划
