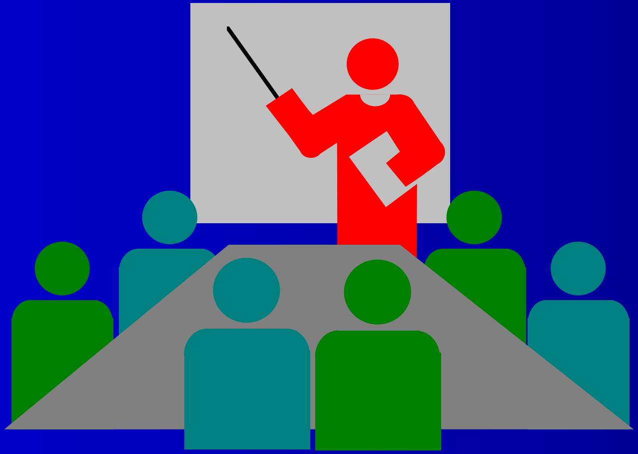
实 验 设 计 基 础



课程安排

第一讲：正交试验

第二讲：方差分析(ANOVA)

第三讲：正交试验的方差分析

第四讲：稳健设计

第五讲：可靠性设计

第一讲：正交试验

第一节：实验设计的意义及其发展过程

第二节：正交试验、正交表及其用法

第三节：混合水平的正交试验设计

第四节：有交互作用的正交试验设计

实验设计（DOE）

- Design of Experiment
- 为什么要进行试验设计？

==> 让我们先看两个例子

例1:

这里有27个球，　其中有且只有一个球质
为9克，其它26个都为10克。给你一架天平，
找出重为9克的那个球。

请问，你至少要称几次？

例2:

这里有9框球(每框100个)，　其中有且只
一框里的球质量全为9克，其它8框里的球都
10克。给你一架天平，请找出里面的球重为
的那个框。

请问，你至少要称几次？

实验设计

- Design of Experiment
- 为什么要进行试验设计？

==>我们要进行试验设计！

第一节：实验设计的意义及其发展过程

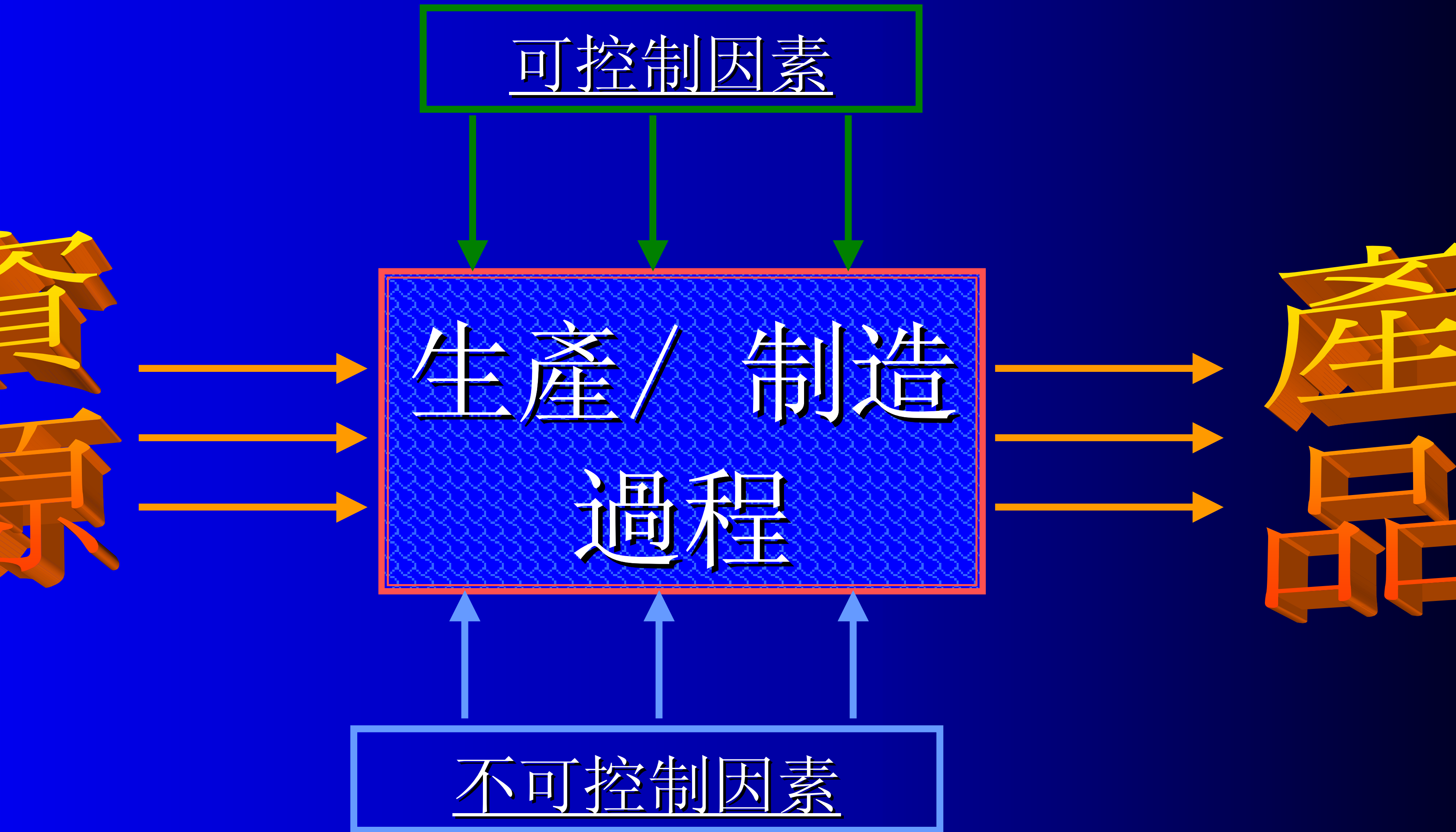
实验设计的意义:

应用数理统计学的基本知识，讨论如何合理地安排试验、取
据，然后进行综合科学分析，从而尽快获得最优组合方案。在工
领域是改进制造过程性能的非常重要的手段。在开发新工序中亦
广泛的应用。

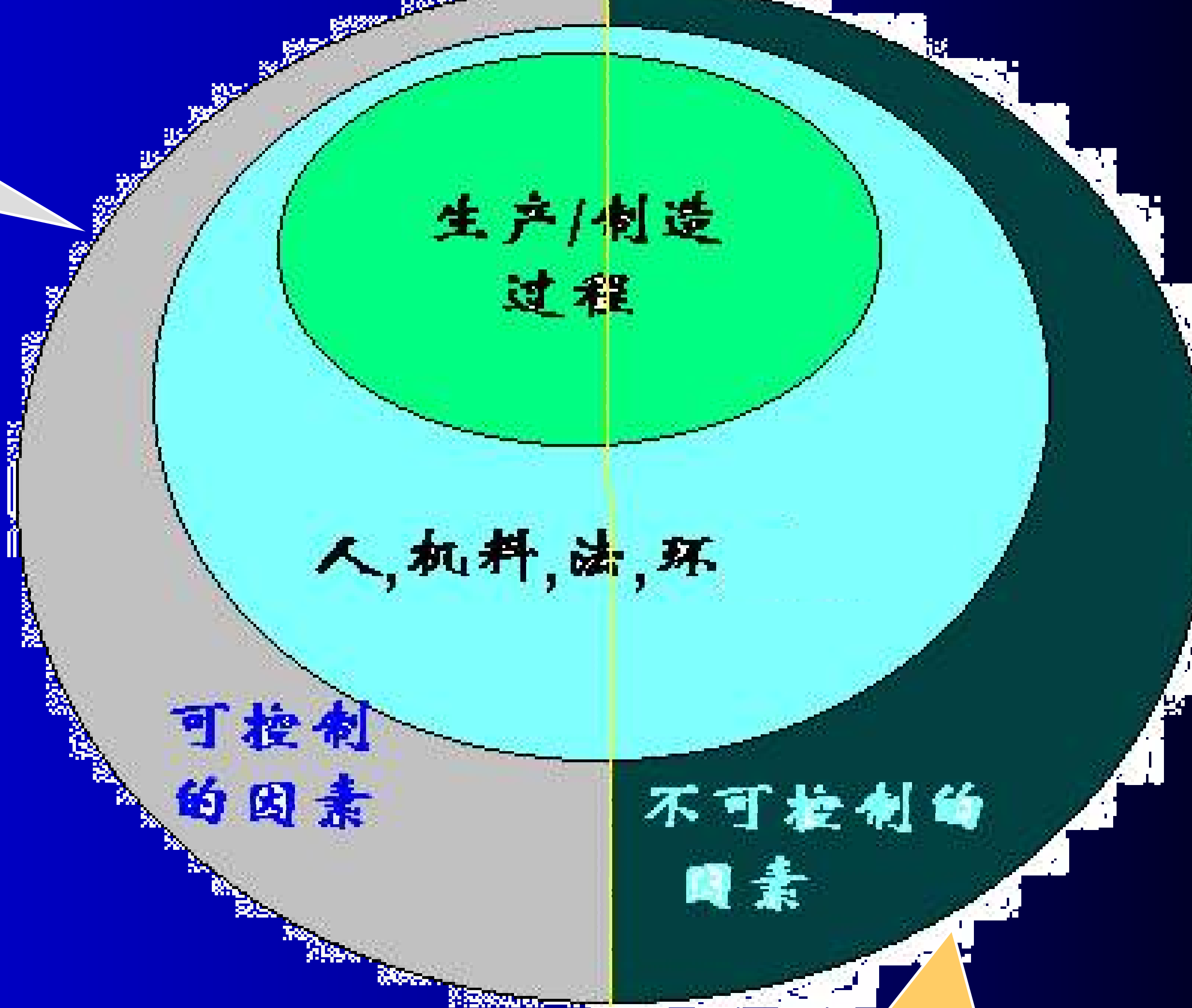
在工序开发的早期应用实验设计方法能得出以下成果:

1. 提高产量;
2. 减少变异性，与额定值或目标值更为一致;
3. 减少开发时间;
4. 减少总成本;

实驗設計在生產/制造過程中的位置：



通過實驗
進行优化設計



統計技術在
產/制造過程
的應用是對
程中輸入
變量
人,机,料,法,環)
行有目的地优化,
輸出的結果更加理想.
<u>驗設計</u> 是其中較為有效的一种
程工具

通過實驗,控制其不良
的影響程度

第一节：进行实验设计的意义及其发展过

实验设计的发展过程:

试验设计始于20世纪20年代，其发展过程大致可分为三个阶段：

1. 早期的方差分析法: 20世纪20年代由英国生物统计学 家、数学歇(R.A.Fisher)提出的，开始主要应用于农业、生物学、遗传学取得了丰硕成果。二战期间，英、美采用这种方法在工业生产得显著效果;
2. 传统的正交试验设计法：以日本的田口玄一为代表;
3. 信噪比试验设计与三阶段设计：1957年，田口玄一提出信噪比设计法和产品的三阶段设计法。他把信噪比设计和正交表设计方差分析相结合，开辟了更为重要、更为广泛的应用领域。

第二节：正交试验、正交表及其用法

为什么要进行正交试验:

在实际生产中，影响试验的因素往往是多方面的，我们要考察素对试验影响的情况。在多因素、多水平试验中，如果对每个的每个水平都互相搭配进行全面试验，需要做的试验次数就会比如对3因素7水平的试验，如果3因素的各个水平都互相搭配进全面试验，就要做7^3=343次试验，对6因素7水平，进行全面试验要做7^6=117649次试验。这显然是不经济的。

我们应当在不影响试验效果的前提下，尽可能地减少试验次数交设计就是解决这个问题的有效方法。

正交设计的主要工具是正交表。

第二节：正交试验、正交表及其用法

正交表:

右图是一個比较典型的正交表.

“L”表示此为正交表,

“8”表示試驗次數,

“2”表示兩水平,

“7”表示試驗最多可以有7個因素 （包括單個因素及其交互作用）.

$L_8(2^7)$ 正交表

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2
4	1	2	2	2	2	1
5	2	1	2	1	2	1
6	2	1	2	2	1	2
7	2	2	1	1	2	2
8	2	2	1	2	1	1

第二节：正交试验、正交表及其用法

正交表的表示方法:

一般的正交表记为$L_n(m^k)$，n是表的行数， 也就是要安排的试验
k 是表中的列数，表示因素的个数；m 是各因素的水平数；

常见的正交表:

2水平的有 $L_4(2^3)$, $L_8(2^7)$, $L_{12}(2^{11})$, $L_{16}(2^{15})$等；
3水平的有 $L_9(3^4)$, $L_{27}(3^{13})$等；
4水平的有 $L_{15}(4^5)$;
5水平的有 $L_{25}(5^6)$;

第二节：正交试验、正交表及其用法

正交表的两条重要性质:

1) 每列中不同数字出现的次数是相等的，如$L_9(3^4)$中，每列中不同的数字是1，2，3，它们各出现3次；

2) 在任意两列中，将同一行的两个数字看成一个有序数对，则每一数对出现的次数是相等的，如$L_9(3^4)$中有序数对共有9个：(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)，它们各出现一次。

所以，用正交表来安排试验时，各因素的各种水平的搭配是均衡的，这是正交表的优点。

试＼列	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	3	3
4	2	1	2
5	2	2	3
6	2	3	1
7	3	1	3
8	3	2	1
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]

第二节：正交试验、正交表及其用法

例1：(单指标的分析方法)

某炼铁厂为提高铁水温度，需要通过试验选择最好的生产
经初步分析，主要有3个因素影响铁水温度，它们是焦比、
压和底焦高度，每个因素都 考虑3个水平，具体情况见表
对这3个因素的3个水平如何安排，才能获得最高的铁水温

因素 水平	焦比A	风压B	底焦高度
1	1:16	170	1.2
2	1:18	230	1.5
3	1:14	200	1.3

第二节：正交试验、正交表及其用法

解：如果每个因素的每个水平都互相搭配着进行全面试验
须做试验3^3=27次。现在我们使用$L_9(3^4)$正交表来安排试验

因素 编号	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	3	3
4	2	1	2
5	2	2	3
6	2	3	1
7	3	1	3
8	3	2	1
9	3	3	2

第三节：正交试验、正交表及其用法

我们按选定的9个试验进行试验，并将每次试验测得的铁水温度记录下来：

试验编号	1	2	3	4	5	6	7	8	
铁水温度(°C)	1365	1395	1385	1390	1395	1380	1390	1390	1

为了便于分析计算，我们把这些温度值和正交表列在一起一个新表。另外，由于铁水温度数值较大，我们把每一个温度的值都减去1350，得到9个较小的数，这样使计算简

试验编号	1	2	3	4	5	6	7	8	
铁水温度(°C)	15	45	35	40	45	30	40	40	

第二节：正交试验、正交表及其用法

分析表

因素 / 编号	1 A	2 B	3 C	铁水温度 (°C)	铁水温度值 减去1350
1	1	1	1	1365	15
2	1	2	2	1395	45
3	1	3	3	1385	35
4	2	1	2	1390	40
5	2	2	3	1395	45
6	2	3	1	1380	30
7	3	1	3	1390	40
8	3	2	1	1390	40
9	3	3	2	1410	60
K_1	95	95	85		
K_2	115	130	145		
K_3	140	125	120		
$k_1(=K_1/3)$	31.7	31.7	28.3		
$k_2(=K_2/3)$	38.3	43.3	48.3		
$k_3(=K_3/3)$	46.7	41.7	40.0		
极差	15.0	11.7	20.0		

第二节：正交试验、正交表及其用法

解释：

K_1这一行的3个数分别是因素A, B, C的第1水平所在的试验中对应的铁水温

K_2这一行的3个数分别是因素A, B, C的第2水平所在的试验中对应的铁水温

K_3这一行的3个数分别是因素A, B, C的第3水平所在的试验中对应的铁水温

k_1, k_2, k_3这3行的3 个数，分别是K_1, K_2, K_3这3行中的3个数的平均值；

极差是同一列中，$k_1, k_2, k_3$3个数中的最大者减去最小者所得的差。极差越明这个因素的水平改变时对试验指标的影响越大。极差最大的那一列，就因素的水平改变时对试验指标的影响最大，那个因素就是我们要考虑的主

通过分析可以得出：各因素对试验指标(铁水温度)的影响按大小次序应当是焦高度) A (焦比) B (风压)；最好的方案应当是C2A3B2。与此结果比较接近第9

号试验。

为了最终确定上面找出的试验方案是不是最好的，可以按这个方案再试验并同第9号试验相比，取效果最佳的方案。

第二节：正交试验、正交表及其用法

例2：(多指标的分析方法---- 综合平衡法)

为提高某产品质量，要对生产该产品的原料进行配方试验。检验3项指标：抗压强度、落下强度 和裂纹度， 前2个指标越好，第3个指标越小越好。根据以往的经验，配方中有3个要因素：水分、粒度和碱度。它们各有3个水平。试进行试析，找出最好的配方方案。

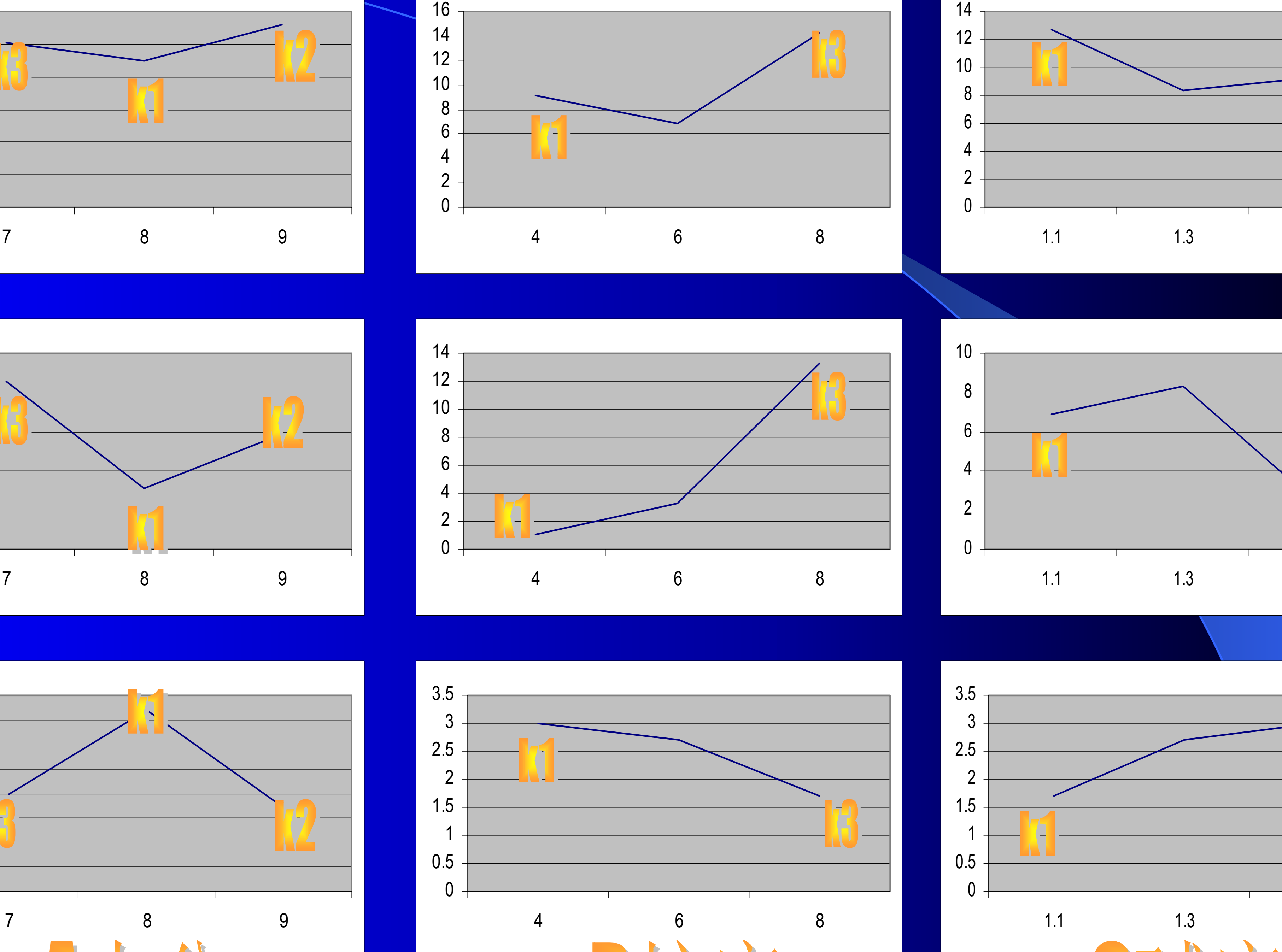
因素 水平	A 水分(%)	B 粒度(%)	C 碱度
1	8	4	1.1
2	9	6	1.3
3	7	8	1.5

第三节：正交试验、正交表及其用法

解：我们选用正交表$L_9(3^4)$来安排试验。

因素 / 试验号	1	2	3	各指标的试验结果		
	A	B	C	抗压强度	落下强度	裂纹
1	1	1	1	11.5	1.1	3
2	1	2	2	4.5	3.6	4
3	1	3	3	11.0	4.6	4
4	2	1	2	7.0	1.1	3
5	2	2	3	8.0	1.6	2
6	2	3	1	18.5	15.1	0
7	3	1	3	9.0	1.1	3
8	3	2	1	8.0	4.6	2
9	3	3	2	13.4	20.2	1

试验号		A	B	C	抗压强度	落下强度	裂纹
1		1	1	1	11.5	1.1	3
2		1	2	2	4.5	3.6	4
3		1	3	3	11.0	4.6	4
4		2	1	2	7.0	1.1	3
5		2	2	3	8.0	1.6	2
6		2	3	1	18.5	15.1	0
7		3	1	3	9.0	1.1	3
8		3	2	1	8.0	4.6	2
9		3	3	2	13.4	20.2	1
抗压强度	K_1	27.0	27.5	38.0			
	K_2	33.5	20.5	24.9			
	K_3	30.4	42.9	28.0			
	k_1	9	9.2	12.7			
	k_2	11.2	6.8	8.3			
	k_3	10.1	14.3	9.3			
	极差	2.2	7.5	4.4			
	最优方案	A_2	B_3	C_1			
裂纹度	K_1	11	9	5			
	K_2	5	8	8			
	K_3	6	5	9			
	k_1	3.7	3.0	1.7			
	k_2	1.7	2.7	2.7			
	k_3	2.0	1.7	3.0			
	极差	2.0	1.3	1.3			
	最优方案	A_2	B_3	C_1			
落下强度	K_1	9.3	3.3	20.8			
	K_2	17.8	9.8	24.9			
	K_3	25.9	39.9	7.3			
	k_1	3.1	1.1	6.9			
	k_2	5.9	3.3	8.3			
	k_3	8.6	13.3	2.4			



k3
k1
k2
7
8
9
16
14
12
10
8
6
4
2
0
k1
k3
4
6
8
14
12
10
8
6
4
2
0
k1
1.1
1.3
k3
k1
k2
7
8
9
14
12
10
8
6
4
2
0
k1
k3
4
6
8
10
8
6
4
2
0
k1
1.1
1.3
k1
3
k2
7
8
9
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
k1
k3
4
6
8
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
k1
1.1
1.3

第二节：正交试验、正交表及其用法

分析：

1) 粒度B对抗压强度和落下强度来讲，极差都是最大的，说明它
影
响最大的因素，而且以取8为最好；对裂纹度来讲，粒度的极差
是最大，不是影响最大的因素，而且也以取8为最好；

2) 碱度C对三个指标的极差都不是最大的，是次要的因素。对抗
强度和裂纹度来讲，碱度取1.1最好；对落下强度，取1.3最好，
取
1.1也不是太差，综合考虑碱度取1.1；

3) 水分A对裂纹度来讲是最大的因素，以取9为最好；但对抗压
和落下强度来讲，水分的极差都是最小的，是影响最小的因素
合考虑水分取9；

第二节：正交试验、正交表及其用法

例3：(多指标的分析方法---- 综合评分法)

某厂生产一种化工产品，需要检验两下指标：核酸统一纯
回收率，这两个指标都是越大越好。有影响的因素有4个，
有3个水平。试通过试验分析找出较好的方案

因素 水平	A 时间/hr	B 加料中核酸含量	C pH值	D 加水量
1	25	7.5	5.0	1:6
2	5	9.0	6.0	1:4
3	1	6.0	9.0	1:2

解：这是4因素3水平的试验，可以选用正交表$L_9(3^4)$。试验
果如表。

第二节：正交试验、正交表及其用法

因素 \ 试验号	1 A	2 B	3 C	4 D	各指标试验结果 纯度	回收率	综合
1	1	1	1	1	17.5	30.0	10
2	1	2	2	2	12.0	41.2	89
3	1	3	3	3	6.0	60.0	84
4	2	1	2	3	8.0	24.2	56
5	2	2	3	1	4.5	51.0	69
6	2	3	1	2	4.0	58.4	74
7	3	1	3	2	8.5	31.0	65
8	3	2	1	3	7.0	20.5	48
9	3	3	2	1	4.5	73.5	91
K_1	273.2	221.2	222.9	260.5			67
K_2	196.6	206.7	236.9	228.6			
K_3	205	249.9	218.9	188.7			
$k_1(=K_1/3)$	91.1	73.7	74.3	86.8			
$k_2(=K_2/3)$	65.5	68.9	79.0	76.2			
$k_3(=K_3/3)$	68.3	83.3	73.0	62.9			
极差	25.5	14.4	6.0	23.9			
最优方案	A_1	B_3	C_2	D_1			

总分 = 4 × 纯度 + 1 × 回收率

第二节：正交试验、正交表及其用法

分析：

1) 根据综合评分的结果，直观上第1号试验的分数最高，应进一
分
析它是不是最好的试验方案；

2) 通过直观分析法可以得知，最好的试验方案是$A_1B_3C_2D_1$。A
两个因素的极差都很大，是对试验影响较大的两个因素；

3) 分析出来的最好方案，在已经做过的9个试验中是没有的。可
按这个方案再试验一次，看能不能得出比第一号试验更好的结
从而确定出真正最好的试验方案；

综合评分法是将多指标的问题，通过加权计算总分的方法化成
指标的问题，使对结果的分析计算都比较方便、简单。

第二节：正交试验、正交表及其用法

利用正交表进行试验的步骤：

1) 明确试验目的，确定要考核的试验指标；

2) 根据试验目的，确定要考察的因素和各因素的水平；要
过

对实际问题的具体分析选出主要因素，略去次要因素；

3) 选用合适的正交表，安排试验计划；

4) 根据安排的计划进行试验，测定各试验指标；

5) 对试验结果进行计算分析，得出合理的结论；

6)若最佳组合方案在试验中未出现，如果条件允许，应安

第三节：混合水平的正交试验设计

混合水平正交表及其用法:

混合水平正交表就是各因素的水平数不完全相等的正交表。譬如：$L_8(2^4)$
就是一种混合水平的正交表

因素 编号	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	1	1	2

第三节：混合水平的正交试验设计

例4：(直接利用混合水平正交表)

某农科站进行品种试验，共有4个因素：A(品种)、B(氮肥量)、C(氮、磷、钾比例)、D(规格)。因素A是4水平的，另外3个是2水平的。试验指标是产量，数值越大越好。

水平 \ 因素	A 品种	B 氮肥量(kg)	C 氮、磷、钾肥比例	D 规格
1	甲	2.5	3:3:1	6X6
2	乙	3.0	2:1:2	7X7
3	丙			
4	丁			

第三节：混合水平的正交试验设计

解：分析结果见下表。

因素 试验号	1 A	2 B	3 C	4 D	试验指标(产量) kg	减去2
1	1	1	1	1	195	-5
2	1	2	2	2	205	5
3	2	1	1	2	220	20
4	2	2	2	1	225	25
5	3	1	2	1	210	10
6	3	2	1	2	215	15
7	4	1	2	2	185	-15
8	4	2	1	1	190	-10
K_1	0	10	20	20		
K_2	45	35	35	25		
K_3	25					
K_4	-25					
k_1	0.0	2.5	5.0	5.0		
k_2	22.5	8.8	6.3	6.3		
k_3	12.5					
k_4	-12.5					
极差	35.0	6.3	1.3	1.3		

第三节：混合水平的正交试验设计

例5：(拟水平法)

今有一试验，试验指标只有一个，它的数值越小越好，这
验有4个因素，其中因素C是2水平的，其余3个因素都是3
的，试安排试验。

因素 水平	A	B	C	D
1	350	15.0	60	65
2	250	5.0	80	75
3	300	10		85

解：我们从第1、第2两个水平中选一个水平让它重复一次
第3水平，这就叫虚拟水平。一般应根据实际经验，选取
较好的水平。

第三节：混合水平的正交试验设计

分析结果见下表。

水平 \ 因素	A	B	C	D
1	350	15.0	60	65
2	250	5.0	80	75
3	300	10	$\boxed{80}$	85

试验号 \ 因素	1 A	2 B	3 C		4 D	试验指标
1	1	1	1	1	1	45
2	1	2	2	2	2	36
3	1	3	3	2	3	12
4	2	1	2	2	3	15
5	2	2	3	2	1	40
6	2	3	1	1	2	15
7	3	1	3	2	2	10
8	3	2	1	1	3	5
9	3	3	2	2	1	47
K_1	93	70		65	132	
K_2	70	81		160	61	
K_3	62	74			32	
k_1	31.0	23.3		21.7	44.0	
k_2	23.3	27.0		26.7	20.3	
k_3	20.7	24.7			10.7	
极差	10.3	3.7		5.0	33.3	

第三节：混合水平的正交试验设计

总结：

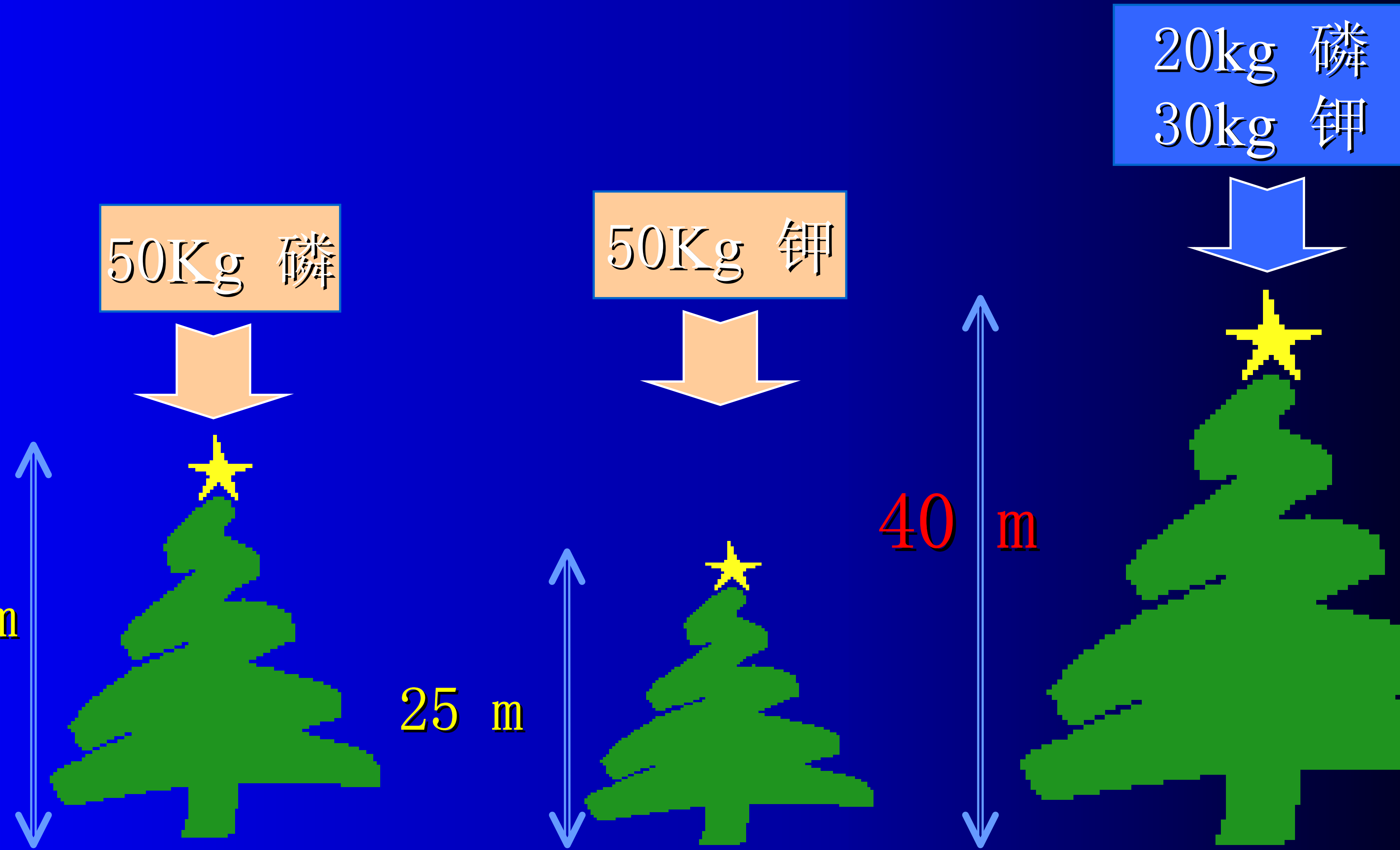
拟水平法是将水平少的因素归入水平数多的正交表中的一
理问题的方法。在没有合适的混合水平的正交表可用时，
平法是一种比较好的处理多因素混合水平试验的方法。它
可以对一个因素虚拟水平，也可以对多个因素虚拟水平。

第四节：有交互作用的正交试验设计

什么是交互作用：

在多因素试验中，各因素不仅各自独立地在起作用，而且
素还经常联合起来起作用。也就是说，不仅各个因素的水
变时对试验指标有影响，而且各因素的联合搭配对试验指
有影响。这后一种影响就叫做因素的交互作用。因素A和
B的交互作用记为A X B.

单个因子的影响与其交互作用的影响比較



互作用 = 总效用 − （20kg 磷的效用 + 30kg 钾的效

第四节：有交互作用的正交试验设计

交互作用表（以正交表$L_8(2^7)$为例）：

用正交表安排有交互作用的试验时，我们把两个因素的交互作用当成一个新的因素来看，让它占有一列，叫交互作用列。

列号 \ 列号()	1	2	3	4	5	6
	(1)	3	2	5	4	7
		(2)	1	6	7	4
			(3)	7	6	5
				(4)	1	2
					(5)	3
						(6)

第四节：有交互作用的正交试验设计

例6：(水平数相同)

我们用一个3因素2水平的有交互作用的例子来说明

某产品的产量取决于3个因素A，B，C，每个因素都有两个水平。每两个因素之间都有交互作用，试验指标为产量，越高越好。具体如下：

因素 / 水平	A	B	C
1	60	1.2	20%
2	80	1.5	30%

第四节：有交互作用的正交试验设计

解：这是3因素2水平的试验。3个因素A, B, C要占3列，它
之

因素 / 试验号	1 A	2 B	3 A x B	4 C	5 A x C	6 B x C	产量
1	1	1	1	1	1	1	65
2	1	1	1	2	2	2	73
3	1	2	2	1	1	2	72
4	1	2	2	2	2	1	75
5	2	1	2	1	2	1	70
6	2	1	2	2	1	2	74
7	2	2	1	1	2	2	60
8	2	2	1	2	1	1	71
K_1	285	282	269	267	282	281	560
K_2	275	278	291	293	278	279	
k_1	142.5	141.0	134.5	133.5	141.0	140.5	
k_2	137.5	139.0	145.5	146.5	139.0	139.5	
极差	5.0	2.0	11.0	13.0	2.0	1.0	
最优方案	A_1	B_1	2水平	C_2	1水平	1水平	

第四节：有交互作用的正交试验设计

分析：

从极差大小看，影响最大的因素是C，以2水平为好；其次
AxB，以2水平为好，第3是因素A，以1水平为好，第4是因
以1水平为好。

列出A和B进行组合的几种效果表：

AXB		B	
		1	2
A	1	69	73.5
	2	72	65.5

从此表可知，A和B的最佳组合为A_1B_2。

AxC 和 BxC的极差很小，对试验的影响很小，忽略不计。

分析：最好的方案应是ABC，这与试验4相吻合

作 业 要 求

1. 按照正交试验(直观分析法)的原理，解决你实际工作中的一个问题，并总结成实验分析报告。

2. 补充作业(另附)

Microsoft Excel Worksheet

第二讲：方差分析（ANOVA）

第一节：问题的提出

第二节：单因素试验的方差分析

第三节：双因素试验的方差分析

第一节：问题的提出

先看一个例子：

考察温度对某一化工厂产品的得率的影响，选了五种不同温度，

温度(°C)	60	65	70	75	80
得率(%)	90	97	96	84	84
	92	93	96	83	86
	88	92	93	88	82
平均得率(%)	90	94	95	85	84

总平均得率=89.6

第一节：问题的提出

从平均得率来看，温度对得率的影响?

1) 同一温度下得率并不完全一样，产生这种差异的原因是试验过程中各种偶然性因素的干扰及测量误差等所致，类误差统称为试验误差;

2) 两 种温度的得率在不同的试验中的倾向有所差别。如 6与 70°C相比较，第一次65°C比70°C 好，而后二次70°C 65°C 好。

产生这种矛盾的现象也是由于试验误差的干扰。

由于试验误差的存在，对于不同温度下得率的差异自然要疑问，这差异是试验误差造成的，还是温度的影响呢?

第一节：问题的提出

1) 由于温度的不同引起得率的差异叫做条件变差；

例中的全部15个数据，参差不齐，它们的差异叫做总变差(或总离差)。产生总变差的原因一是试验误差，一是条件变差。

2) 方差分析解决这类问题的思想是：

a. 由数据的总变差中分出试验误差和条件变差，并赋予它们数量表示；

b. 用条件变差和试验误差在一定意义下进行比较，如两者相差不大，说明条件的变化对指标影响不大；反之，则说明条件的变化影响是很大的，不可忽视；

c. 选择较好的工艺条件或确定进一步试验的方向；

第一节：问题的提出

变差的数量表示：

有n个参差不齐的数据 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 它们之间的差异称为变

如何给变差一个数量表示呢?

1) 一个最直观的想法是用这n个数中最大值与最小值之差，
差来表达，用R记之；

2) 变差平方和，以S记之。

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \quad \text{其中} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

S是每个数据离平均值有多远的一个测度，它越大表示数据
差异越大。

第一节：问题的提出

对变差平方和的进一步讨论：

例：测得某高炉的六炉铁水含碳量为：4.59，4.44，4.53，4

4.72，4.55，求其变差平方和。

$$\bar{x}=\frac{1}{6}(4.59+4.44+4.53+4.52+4.72+4.55)$$

$$=\frac{27.35}{6}=4.558$$

$$S=(4.59-4.558)^2+(4.44-4.558)^2+$$

$$(4.53-4.558)^2+(4.52-4.558)^2+$$

$$(4.72-4.558)^2+(4.55-4.558)^2$$

$$=0.043484$$

第一节：问题的提出

对变差平方和的进一步讨论(2)：

我们看到S的计算是比较麻烦的，原因是计算$\bar{x}$时有效位数增
因而计算平方时工作量就大大增加。另外，在计算$\bar{x}$时由于除
尽而四舍五入，在计算S时，累计误差较大。为此常用以下公

$$S=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

对于前面的例子

$$S=(4.59^2+4.44^2+\ldots+4.55^2)-\frac{1}{6}(4.59+4.44+\ldots+4.55)^2=0.043483$$

第一节：问题的提出

自由度的提出：

例2：在上例的基础上在同样的工艺条件下又测了四炉铁水，
们是：4.60, 4.42, 4.68, 4.54, 加上原来的六炉共十炉，求其
和。

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(4.59 + ... + 4.54) = \frac{45.59}{10} = 4.559$$

$$S = 0.07949$$

第一节：问题的提出

自由度的提出(2):

平均数与过去的结果是相近的，但平方和是显著地变大了。要设法消除数据个数的多少给平方和带来的影响。

一个直观的想法是用平方和除以相应的项数，但从数学理论知这不是一个最好的办法，而应把项数加以修正，这个修正就叫做自由度。

第一节：问题的提出

自由度的提出(3)：

设有n个数$y_1, y_2, \ldots, y_n$, 它们的平方和 $S=\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ 的自由度

少呢? 这就看$\{y_i\}$ 之间有没有线性约束关系，如果有m个($0\le$

线性约束方程

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots +a_{1n}y_n = 0 \\
a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots +a_{2n}y_n = 0 \\
\ldots \\
a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\ldots +a_{mn}y_n = 0
\end{cases}
$$

并且这m个方程相互独立，即方程系数矩阵的秩等于m, 则S

由度是n - m.

第一节：问题的提出

自由度的提出(4)：

根据这个定义，如令$y_i = x_i - x$ (i=1, 2, … , n)

则 $$S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

显然 {yi}之间有一个线性约束关系，即

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{x} = 0$$

即$m = 1$, $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 1$

所以变差平方和的自由度 = n - m = n - 1

第一节：问题的提出

均方的概念：

平均平方和(简称均方)等于变差平方和除以相应的自由度f.

平均平方和以MS表示，$MS = \frac{S}{f}$

它的开方叫做均方差 $\sqrt{\frac{1}{n-1}S}$

对例1、MS = 0.043483/5 = 0.0086966, 均方差为0.09326

对例2、MS = 0.07949/9 = 0.0088322，均方差为0.09398

我们看到六炉和十炉的MS是很相近的，这与工艺条件相同是合的，说明用MS反映波动的大小是更为合理的。

第二节：单因素试验的方差分析

假设：

单因素A有a个水平A_1，A_2, … … , A_a，在水平A_i (i=1, 2, … … , a)下，

n_i次独立试验，得到试验指标的观察值列于下表：

	1	2	…	
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n_1}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n_2}
…	…	…	…	…
A_i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{in_i}
…	…	…	…	…
A_a	x_{a1}	x_{a2}	…	x_{an_a}

我们假定在各个水平A_i下的样本来自具有相同方差σ^2，均值分别为μ

态总体$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$，其中$\mu_i$, σ^2均为未知，并且不同水平A_i下的样

间

相互独立。

第二节：单因素试验的方差分析

总离差平方和的分解:

记在水平A_i下的样本均值为 $\overline{x_{i.}} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

样本数据的总平均值为 $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

总离差平方和为 $S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x})^2$

将S_T改写并分解得

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}\left[(x_{i.} - \overline{x}) + (x_{ij} - \overline{x}_{i.})\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{x}_{i.} - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x}_{i.})^2$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{x}_{i.} - \overline{x})(x_{ij} - \overline{x}_{i.})$$

第二节：单因素试验的方差分析

总离差平方和的分解(2):

上面展开式中的第三项为0

若记 $S_A = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2$

$S_E = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2$

则有： $S_T = S_A + S_E$

S_T表示全部试验数据与总平均值之间的差异

S_A表示在A_i水平下的样本均值与总平均值之间的差异, 是组

S_E表示在A_i水平下的样本均值与样本值之间的差异, 是组内

它是由随机误差引起的。

第二节：单因素试验的方差分析

自由度的概念:

在实际计算中，我们发现在同样的波动程度下，数据多的平方
大于数据少的平方和，因此仅用平方和来反映波动的大小还是
的。我们要设法消去数据个数的多少给平方和带来的影响。为
入了自由度的概念。一个直观的想法是用平方和除以相应的项
但应把项数加以修正，这个修正的数就叫自由度。

S_T的自由度为 (n - 1);

S_A的自由度为 (a - 1);

S_E的自由度为 (n - a);

均方:

$MS_A = S_A / (a-1)$;　　　$MS_E = S_E / (n-a)$

第二节：单因素试验的方差分析

F检验法：

统计量 $F = MS_A/MS_E \sim F(a-1, n-a)$，对于给出的α，查出$F_\alpha$(a
- a)的值，由样本计算出S_A和S_E，从而算出F值。从而有如下判

若$F > F_\alpha(a-1, n-a)$，则说明试验条件的变化对试验结果有显著

若$F < F_\alpha(a-1, n-a)$，则说明试验条件的变化对试验结果无显著

为了方便计算，我们采用下面的简便计算公式：

记 $x_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ i= 1, 2, … $x_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

则有 $S_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{n}$, $S_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{x_{i\cdot}^2}{n_i} - \frac{x_{\cdot\cdot}^2}{n}$, $S_E = S_T - S_A$

第二节：单因素试验的方差分析

方差分析表:

单因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	S_A	a - 1	$MS_A = \dfrac{S_A}{a-1}$	$F = \dfrac{MS_A}{MS_E}$
误差E	S_E	n - a	$MS_E = \dfrac{S_E}{n-a}$	
总和T	S_T	n - 1		

第二节：单因素试验的方差分析

例1：(单因素的方差分析)

人造纤维的抗拉强度是否受掺入其中的棉花的百分比的影
有疑问的。现确定棉花百分比的5个水平: 15%, 20%, 25%
30%, 35%。每个水平中测5个抗拉强度的值，列于下表。
抗拉强度是否受掺入棉花百分比的影响(α ＝0.01)?

棉花的百分比 (i)	抗拉强度观察值(j)					
	1	2	3	4	5	x_i
15	7	7	15	11	9	49
20	12	17	12	18	18	77
25	14	18	18	19	19	88
30	19	25	22	19	23	108
35	7	10	11	15	11	54

$$x = \sum^{5} \sum^{5} x = 7 + \cdots + 11 = 376$$

第二节：单因素试验的方差分析

解:

a = 5, n_i = 5 (i = 1, 2, … … , 5), n = 25

$$S_T = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{n} = 7^2 + 7^2 + \dots + 11^2 - \frac{376^2}{25} = 636.96$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_{i.}^2}{n_i} - \frac{x_{..}^2}{n} = \frac{1}{5}(49^2 + \dots + 54^2) - \frac{376^2}{25} = 475.76$$

$$S_E = S_T - S_A = 636.96 - 475.76 = 161.20$$

S_T, S_A, S_E的自由度分别为24，4，20

$$MS_A = \frac{475.76}{4} = 118.94 \qquad MS_E = \frac{161.20}{20} = 8.06$$

第二节：单因素试验的方差分析

解(2):

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	475.76	4	118.94	(118.94/8.06)=14.76
误差E	161.20	20	8.06	
总和T	636.96	24		

已给出 α =0.01， 查表得$F_\alpha(a-1, n-a)=F_{0.01}(4,20)= 4.43$

这里$F=14.76>4.43=F_{0.01}(4, 20)$

说明棉花的百分比对人造纤维的抗拉强度有影响。

第三节：双因素试验的方差分析

无交互作用的方差分析:

设两因素A，B，A有a个水平A_1，A_2，… …，A_a，B有b个
B_1，B_2，… …，B_b，在每一个组合水平(A_i, B_j)下，进行一次
复试验，得到试验指标的观察值列于下表：

因素B(j) / 因素A(i)	B_1	B_2	…	B_j	…	B_b
A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1b}
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2b}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{ib}
…	…	…	…	…	…	…
A_a	x_{a1}	x_{a2}	…	x_{aj}	…	x_{ab}
$x_{.j}$	$x_{.1}$	$x_{.2}$	…	$x_{.j}$	…	$x_{.b}$

设X_{ij}~$N(\mu_{ij}, \sigma^2)$，各x_{ij}相互独立。

第三节：双因素试验的方差分析

<u>总离差平方和的分解:</u>

记在水平A_i下的样本均值为 $\overline{x_{i.}} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}$

记在水平B_j下的样本均值为 $\overline{x_{.j}} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} x_{ij}$

样本数据的总平均值为 $\bar{x} = \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij}$

总离差平方和为

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x})^2$$

将S_T改写并分解得

$$S_T = b\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2 + a\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}_{i.} -$$

记为$S_T = S_A$ (效应

第三节：双因素试验的方差分析

自由度:

S_T的自由度为 (ab - 1);
S_A的自由度为 (a - 1);
S_B的自由度为 (b - 1);
S_E的自由度为 (a - 1)(b-1);

均方:

$$MS_A = \frac{S_A}{a-1},$$

$$MS_B = \frac{S_B}{b-1},$$

$$MS_E = \frac{S_E}{(a-1)(b-1)}.$$

第三节：双因素试验的方差分析

F检验法:

统计量

$$F_1=\frac{MS_A}{MS_E}\sim F(a-1,(a-1)(b-1))$$

$$F_2=\frac{MS_B}{MS_E}\sim F(b-1,(a-1)(b-1))$$

对于给出的α， 查出$F_\alpha(a-1,(a-1)(b-1))$, $F_\alpha(b-1,(a-1)(b-1))$的值， 由样本计算出F_1, F_2值。从而有如下判断：

若$F_1> F_\alpha(a-1,(a-1)(b-1))$，则说明因素A的变化对试验结果有显著影

若$F_2> F_\alpha(b-1,(a-1)(b-1))$，则说明因素B的变化对试验结果有显著影

为了方便计算，我们采用下面的简便计算公式：

$$S_T=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}x_{ij}^2-\frac{x_{\cdot\cdot}^2}{ab},$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{a}\frac{x_{i\cdot}^2}{b}-\frac{x_{\cdot\cdot}^2}{ab},$$

$$S_B=\sum_{j=1}^{b}\frac{x_{\cdot j}^2}{a}-\frac{x_{\cdot\cdot}^2}{ab},$$

第三节：双因素试验的方差分析

方差分析表:

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	S_A	a-1	$MS_A = \frac{S_A}{a-1}$	$F_1 = \frac{MS}{MS}$
因素B	S_B	b-1	$MS_B = \frac{S_B}{b-1}$	$F_2 = \frac{MS}{MS}$
误差E	S_E	(a-1)(b-1)	$MS_E = \frac{S_E}{(a-1)(b-1)}$	
总和T	S_T	ab-1		

第三节：双因素试验的方差分析

例2：(双因素无交互作用的方差分析)

使用4种燃料，3种推进器作火箭射程试验，每一种组合情
做一次试验，则得火箭射程列在表中，试分析各种燃料(A
各种推进器(B_j)对火箭射程有无显著影响(α =0.05)

B_j / A_i	B1	B2	B3	$x_{i.}$
A1	582	562	653	1797
A2	491	541	516	1548
A3	601	709	392	1702
A4	758	582	487	1827
$x_{.j}$	2432	2394	2048	6874=x

第三节：双因素试验的方差分析

解:

这里a=4, b=3, ab=12

$$S_T=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}x_{ij}^2-\frac{x_{..}^2}{12}=582^2+\ldots+487^2-\frac{6874^2}{12}=111342$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{4}\frac{x_{i.}^2}{3}-\frac{x_{..}^2}{12}=\frac{1}{3}(1797^2+1548^2+1702^2+1827^2)-\frac{6874^2}{12}=15759$$

$$S_b=\sum_{j=1}^{3}\frac{x_{.j}^2}{4}-\frac{x_{..}^2}{12}=\frac{1}{4}(2432^2+2379^2+2048^2)-\frac{6874^2}{12}=22385$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B=111342-15759-22385=73198$$

第三节：双因素试验的方差分析

解(2):

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
燃料A	15759	3	5253	0.43
推进器B	22385	2	11192.5	0.92
误差E	73198	6	12199.7	
总和T	111342	11		

给出的 α =0.05, 查出$F_{0.05}(3, 6)$=4.76, $F_{0.05}(2, 6)$ = 5

因为F_1=0.43<4.76, F_2=0.92<5.14

故不同的燃料、不同的推进器对火箭射程均无显著影响。

第三节：双因素试验的方差分析

有交互作用的方差分析(分析过程略):

自由度:

S_T的自由度为 (abn - 1); （ n为重复试验次数）
S_A的自由度为 (a - 1);
S_B的自由度为 (b - 1);
S_{AxB}的自由度为(a-1)(b-1):
S_E的自由度为 ab(n-1);

均方:

$$MS_A = \frac{S_A}{a-1},$$

$$MS_B = \frac{S_B}{b-1},$$

$$MS_{AxB} = \frac{S_{AxB}}{(a-1)(b-1)},$$

第三节：双因素试验的方差分析

<u>有交互作用的方差分析(2):</u>

简化公式

$$S_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk}^2 - \frac{x_{\cdots}^2}{abn},$$

$$S_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} x_{i\cdot\cdot}^2 - \frac{x_{\cdots}^2}{abn},$$

$$S_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} x_{\cdot j\cdot}^2 - \frac{x_{\cdots}^2}{abn},$$

$$S_{AxB} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} x_{ij\cdot}^2 - \frac{x_{\cdots}^2}{abn} - S_A - S_B,$$

$$S \;= S \;- S \;- S \;- S$$

第三节：双因素试验的方差分析

有交互作用的方差分析(3):

方差分析表

例：　　双因素方差分析表

因素	平方和	自由度	均方	F比
因素A	S_A	$a-1$	$MS_A=S_A/(a-1)$	$F=MS_A/$
因素B	S_B	$b-1$	$MS_B=S_B/(b-1)$	$F=MS_B/$
交互作用AxB	S_{AxB}	$(a-1)(b-1)$	$MS_{AxB}=S_{AxB}/(a-1)(b-1)$	$F=MS_{AxE}$
误差E	S_E	$ab(n-1)$	$MS_E=S_E/(n-a)$	
总和T	S_T	$abn-1$		

第三讲：正交试验的方差分析

第一节：正交设计方差分析的步骤

第二节：3水平正交设计的方差分析

第三节：混合型正交设计的方差分析

第四节：拟水平法的方差分析

第五节：重复试验的方差分析

第一节：　正交设计方差分析的步骤

计算离差的平方和:

设用正交表安排m个因素的试验，试验总次数为n, 试验的结果分
为x_1, x_2, … … , x_n. 假定每个因素有n_a个水平，每个水平做a次试
则n = an_a.

1) 总离差的平方和S_T

记 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$　　$S_T = \sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2$

记为 $S_T = Q_T - P$ 其中 $Q_T = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$　$P = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2$

S_T反映了试验结果的总差异，它越大，说明各次试验的结果之
差异越大。试验结果之所以有差异，一是由因素水平的变化所
的，二是因为有试验误差。

第一节： 正交设计方差分析的步骤

2) 各因素离差的平方和

下面以计算因素A的离差的平方和S_A为例来说明。设因素A安排在正交表的某列，可看作单因素试验。用x_{ij}表示因素A的第i个水平的第j次试验的结果(i = 1, 2, …, n_a; j = 1, 2, …, a)，则有 $\sum_{i=1}^{n_a}\sum_{j=1}^{a} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_k$

由单因素的方差分析 $S_A = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n_a}(\sum_{j=1}^{a} x_{ij})^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n_a}\sum_{j=1}^{a} x_{ij})^2 = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n_a} K_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} x_k)^2$

记为 $S_A = Q_A - P$ 其中 $Q_A = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n_a} K_i^2$ $K_i = \sum_{j=1}^{a} x_{ij}$

K_i 表示因素的第i 个水平a次试验结果的和。

S_A反映了因素A的水平变化时所引起的试验结果的差异，即因素A对试验结果的影响。用同样的方法可以计算其它因素的离差平方和。对于两因素的交互作用，我们把它当作一个新的因素。如果交互作用占两列，则交互作用的离差的平方和等于这两列的离差的平方和之和

比如 $S_{AxB} = S_{(AxB)1} + S_{(AxB)2}$

第一节： 正交设计方差分析的步骤

3) 试验误差的离差的平方和S_E

设$S_{因+交}$为所有因素以及要考虑的交互作用的离差的平方和，
因为 $S_T = S_{因+交} + S_E$，
所以 $S_E = S_T - S_{因+交}$

<u>计算自由度:</u>

试验的总自由度 $f_{总}$ = 试验总次数 - 1 = n - 1
各因素的自由度 $f_{因}$ = 因素的水平数 - 1 = $n_a - 1$
两因素交互作用的自由度等于两因素的自由度之积$f_{AxB} = f_A \times f_B$
试验误差的自由度$f_E = f_{总} - f_{因+交}$

第一节：　正交设计方差分析的步骤

<u>计算平均离差平方和(均方):</u>

在计算各因素离差平方和时，我们知道，它们都是若干项平方的

它们的大小与项数有关，因此不能确切反映各因素的情况。为了

除项数的影响，我们计算它们的平均离差的平方和。

因素的平均离差平方和 = (因素离差的平方和)/因素的自由度 = S

试验误差的平均离差平方和

= (试验误差的离差的平方和)/试验误差的自由度 = S_E / f_E

<u>求F比:</u>

将各因素的平均离差的平方和与误差的平均离差平方和相比，得

第一节： 正交设计方差分析的步骤

对因素进行显著性检验:

给出检验水平α， 从F分布表中查出临界值$F_{\alpha}(f_{因}, f_E)$。将在“求
比”中算出的F值与该临界值比较， 若$F > F_{\alpha}(f_{因}, f_E)$， 说明该因
试验结果的影响显著， 两数差别越大， 说明该因素的显著性越

第二节： 3水平正交设计的方差分析

例1 (无交互作用):

磁鼓电机是彩色录像机磁鼓组件的关键部件之一，按质量要求
出力矩应大于210g.cm。某生产厂过去这项指标的合格率较低，
而希望通过试验找出好的条件，以提高磁鼓电机的输出力矩。
工程技术人员的经验，取试验因素和相应水平如下表：

因子水平表

因子 \ 水平	1	2	3
A：充磁量(10-4T)	900	1100	1300
B：定位角度((π/180)rad)	10	11	12
C：定子线圈匝数(匝)	70	80	90

第二节： 3水平正交设计的方差分析

解：(选用正交表$L_9(3^4)$)

表头设计：

表头设计	A	B	C	
列号	1	2	3	4

因子 / 试验号	充磁量 10^{-4}T		定位角度 (π/180)rad		定子线圈匝数 匝		试验结果y 输出力矩(g.cm)
1	(1)	900	(1)	10	(1)	70	160
2	(1)	900	(2)	11	(2)	80	215
3	(1)	900	(3)	12	(3)	90	180
4	(2)	1100	(1)	10	(2)	80	168
5	(2)	1100	(2)	11	(3)	90	236
6	(2)	1100	(3)	12	(1)	70	190
7	(3)	1300	(1)	10	(3)	90	157
8	(3)	1300	(2)	11	(1)	70	205

列号 / 试验号	A 1	B 2	C 3	4	试验结果y 输出力矩(g.cm
1	1	1	1	1	160
2	1	2	2	2	215
3	1	3	3	3	180
4	2	1	2	3	168
5	2	2	3	1	236
6	2	3	1	2	190
7	3	1	3	2	157
8	3	2	1	3	205
9	3	3	2	1	140
K_1	555	485	555	536	$T=1651$
K_2	594	656	523	562	$T^2 = 2725801$
K_3	502	510	573	553	$P = 302866.8$
K_1^2	308025	235225	308025	287296	$Q_T = 310519$
K_2^2	352836	430336	273529	315844	
K_3^2	252004	260100	328329	305809	
Q	304288.3	308553.7	303294.3	302983	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

第二节： 3水平正交设计的方差分析

详细计算如下：

$$P = \frac{1}{9}(1651)^2 = 302866.78$$

$$Q_A = \frac{1}{3}(308025 + 352836 + 252004) = 304288.3$$

$$Q_B = \frac{1}{3}(235225 + 430336 + 260100) = 308553.7$$

$$Q_C = \frac{1}{3}(308025 + 273529 + 328329) = 303294.3$$

$$S_A = Q_A - P = 1421.6$$

$$S_B = Q_B - P = 5686.9$$

$$S_C = Q_C - P = 427.6$$

$$S_T = Q_T - P = \sum_{k=1}^{9} y_k^2 - P = 310519 - 302866.78 = 7652.2$$

$$S_e = S_T - S_A - S_B - S_C = 116.2$$

第二节： 3水平正交设计的方差分析

列方差分析表如下：

方差分析表

方差来源	离差平方和	自由度	均方	F值	临界值	显著性	优方案
因子A	1421.6	2	710.8	12.23	$F_{0.05}(2,2)=19.0$	*	A_2
因子B	5686.9	2	2843.4	48.94	$F_{0.10}(2,2)=9.0$	**	B_2
因子C	427.6	2	213.8	3.68			C_3
误差	116.2	2	58.1				
总和	7652.2	8					

最佳条件的选择：

对显著因子应取最好的水平，对不显著因子的水平可以任意选取；实际中通常从降低成本操作方便等角度加以选择，上面的例子中对因子A与B应选择A_2B_2，因子C可以任选，譬如为节约材料可选择C_1

第二节： 3水平正交设计的方差分析

验证试验：

对$A_2B_2C_1$进行三次试验，结果为：234，240，220，平均

为231.3. 此结果是满意的

第二节：3水平正交设计的方差分析

例2(有交互作用):

为提高某产品的产量，需要考虑3个因素：反应温度、反应压
液浓度。每个因素都取3个水平，具体数值见表。考虑因素之
有一级交互作用，试进行方差分析，找出最好的工艺条件。

因素 水平	A(温度)	B(压力)	C(浓度)
1	60	2.0	0.5
2	65	2.5	1.0
3	70	3.0	2.0

试验号	A	B	(AXB)1	(AXB)2	C	(AXC)1	(AXC)2	(BXC)1	(BXC)2	x_k
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.30
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	4.63
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	7.23
4	1	2	2	2	1	1	1	2	3	0.50
5	1	2	2	2	2	2	2	3	1	3.67
6	1	2	2	2	3	3	3	1	2	6.23
7	1	3	3	3	1	1	1	3	2	1.37
8	1	3	3	3	2	2	2	1	3	4.73
9	1	3	3	3	3	3	3	2	1	7.07
10	2	1	2	3	1	2	3	1	1	0.47
11	2	1	2	3	2	3	1	2	2	3.47
12	2	1	2	3	3	1	2	3	3	6.13
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	0.33
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	3.40
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	5.80
16	2	3	1	2	1	2	3	3	2	0.63
17	2	3	1	2	2	3	1	1	3	3.97
18	2	3	1	2	3	1	2	2	1	6.50
19	3	1	3	2	1	3	2	1	1	0.03
20	3	1	3	2	2	1	3	2	2	3.40
21	3	1	3	2	3	2	1	3	3	6.80
22	3	2	1	3	1	3	2	2	3	0.57
23	3	2	1	3	2	1	3	3	1	3.97
24	3	2	1	3	3	2	1	1	2	6.83
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1.07
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	3.97
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	6.57
K_1	36.73	33.46	35.63	34.30	6.27	32.94	34.21	33.33	32.98	100.64
K_2	30.70	31.30	32.08	31.73	35.21	34.66	33.13	33.04	33.43	
K_3	33.21	35.88	32.93	34.61	59.16	33.04	33.30	34.27	34.23	
K_1^2	1349.09	1119.57	1269.50	1176.49	39.31	1085.04	1170.32	1110.89	1087.68	
K_2^2	942.49	979.69	1029.13	1006.79	1239.74	1201.32	1097.60	1091.64	1117.56	
K_3^2	1102.90	1287.37	1084.38	1197.85	3499.91	1091.64	1108.89	1174.43	1171.69	

第二节： 3水平正交设计的方差分析

解：(选用正交表$L_{27}(3^{13})$)

根据前面的公式作如下计算：

$$P = \frac{1}{27}(100.64)^2 = 375.13,$$

$$Q_A = \frac{1}{9}(36.73^2 + 30.70^2 + 33.21^2) = 377.1$$

$$Q_B = \frac{1}{9}(33.46^2 + 31.30^2 + 35.88^2) = 376.2$$

$$Q_C = \frac{1}{9}(6.27^2 + 35.21^2 + 59.16^2) = 531.00$$

$$Q_{(AXB)_1} = \frac{1}{9}(35.63^2 + 32.08^2 + 32.93^2) = 37$$

$$Q_{(AXB)_2} = \frac{1}{9}(34.30^2 + 31.73^2 + 34.61^2) = 37$$

$$Q_{(AXC)_1} = \frac{1}{9}(32.94^2 + 34.66^2 + 33.04^2) = 37$$

$$Q_{(AXC)_2} = \frac{1}{9}(34.21^2 + 33.13^2 + 33.30^2) = 37$$

$$Q_{(BXC)_1} = \frac{1}{9}(33.33^2 + 33.04^2 + 34.27^2) = 37$$

$$Q_{(BXC)_2} = \frac{1}{9}(32.98^2 + 33.43^2 + 34.23^2) = 37$$

第二节：3水平正交设计的方差分析

由此得出

$$S_A = Q_A - P = 2.04,$$
$$S_B = Q_B - P = 1.17,$$
$$S_C = Q_C - P = 155.87,$$
$$S_{AXB} = S_{(AXB)_1} + S_{(AXB)_2} = Q_{(AXB)_1} + Q_{(AXB)_2} - 2P = 1.32$$

类似地

$$S_{AXC} = Q_{(AXC)_1} + Q_{(AXC)_2} - 2P = 0.28$$
$$S_{BXC} = Q_{(BXC)_1} + Q_{(BXC)_2} - 2P = 0.18$$

最后计算总平方和，得出

$$Q_T = \sum_{k=1}^{27} x_k^2 = 53633S$$
$$S_T = Q_T - P = 53633 - 37513 = 16120$$
$$S_E = S_T - S_{\text{柢+蝠}}$$
$$= S_T - (S_A + S_B + S_C + S_{AXB} + S_{AXC} + S_{BXC)} = 0.34$$

第二节：3水平正交设计的方差分析

用公式计算自由度：

$$f_A = f_B = f_C = 3-1 = 2,$$
$$f_{AXB} = f_{AXC} = f_{BXC} = 2x2 = 4,$$
$$f_{耗} = n-1 = 27-1 = 26,$$
$$f_E = f_{耗} - f_{秖+蝠} = 26-18 = 8$$

再用公式计算平均离差的平方和，然后计算F值，再与F分布表
出的相应的临界值$F_{\alpha}(f_{因}，f_E)$比较，判断各因素显著性的大小。
通常，若$F> F_{0.01}(f_{因}，f_E)$，就称该因素是高度显著的，用两个星
示；若$F< F_{0.01}(f_{因}，f_E)$，但$F> F_{0.05}(f_{因}，f_E)$，则称该因素的影响
著的，用一个星号表示；若$F<F_{0.05}(f_{因}，f_E)$，就称该因素的影响
显著的，不用星号表示。

第二节：3水平正交设计的方差分析

方差分析表：

方差来源	离差平方和	自由度	平均离差平方和（均方）	F值	临界值	显著性	优方案
A	2.04	2	1.02	20.4	$F_{0.01}(2,16)=6.23$	**	A1
B	1.17	2	0.585	11.7		**	B3
C	155.87	2	77.935	1558.7	$F_{0.01}(4,16)=4.77$	**	C3
AXB	1.32	4	0.33	6.6		**	A1B3
AXC	0.28	4	0.05				
BXC	0.18	4					
误差E	0.34	8					
总和T	161.2	26					

因为S_{AXC}和S_{BXC}都很小，和误差项合并，作为误差项。通过F值与临界值比较看出，因素A,B,C和交互作用AXB对试验的影响都显著的，从F值的大小看，因素C最显著，以下依次为A，B，AXB

第二节： 3水平正交设计的方差分析

方差分析(2):

由于这里的试验指标是产品的产量，越大越好，所以最优方案
各因素中K的最大值所对应的水平。因素A应取第1水平，因素B
第3水平，因素C应取第3水平。交互作用AXB也是显著的，但
于AXB占两列，直观分析法有些困难，因此把A和B的各种组合
验结果对照起来分析。

B \ A	1	2	2
1	13.16	10.07	10.23
2	10.40	9.53	11.37
3	13.17	11.10	11.61

从表中看出，当A取第1水平、B取第3水平时，试验结果为13.1
是所有结果中的最大值，因此取A_1B_3。于是，最优方案就取A_1

第三节：混合型正交设计的方差分析

混合型正交设计的方差分析，本质上与一般水平数相等正交设计的方差分析相同，只要在计算时注意到各水平数的差别就行了。

现以$L_8(4X2^4)$混合型正交表为例：

总离差平方和为 $$S_T = Q_T - P = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 - \frac{1}{8}(\sum_{k=1}^{8} x_k)^2$$

因素偏差平方和有两种情况：

2水平因素：$$S = \frac{1}{8}(K_1 - K_2)^2$$

4水平因素：$$S = \frac{1}{2}(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + K_4^2) - \frac{1}{8}(\sum_{k=1}^{8} x_k)^2$$

第三节：混合型正交设计的方差分析

例4:

某钢厂生产一种合金，为便于校直冷拉，需要进行一次退火热
以降低合金的硬度。根据冷加工变形量，在该合金技术要求范
硬度越低越好。试验的目的是寻求降低硬度的退火工艺参数。
的指标是洛氏硬度(HR)，经分析研究，要考虑的因素有3个：
温度A，保温时间B，冷却介质C。

因素 \ 水平	A 退火温度(°C)	B 保温时间(hr)	C 冷却介质
1	730	1	空气
2	760	2	水
3	790		
4	820		

因素 / 试验号	A	B	C			试验结果 x_k	x_k^2
	1	2	3	4	5		
1	1	1	1	1	1	31.60	998.56
2	1	2	2	2	2	31.00	961.00
3	2	1	1	2	2	31.60	998.56
4	2	2	2	1	1	30.50	930.25
5	3	1	2	1	2	31.20	973.44
6	3	2	1	2	1	31.00	961.00
7	4	1	2	2	1	33.00	1089.00
8	4	2	1	1	2	30.30	918.09
K_1	62.60	127.40	124.50	123.60	124.10	T=250.2	Q_T=7829.9
K_2	62.10	122.80	125.70	126.60	126.10		
K_3	62.20						
K_4	63.30						
K_1^2	3918.76	16230.96	15500.25	15276.96	15901.21		
K_2^2	3856.41	75079.84	15800.49	16627.56	15400.81		
K_3^2	3868.84						
K_4^2	4006.89						
S	0.445	2.645	0.180	1.125	0.500		

第三节：混合型正交设计的方差分析

解：

$$Q_T = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 7829.90, T = \sum_{k=1}^{8} x_k = 250.20,$$

$$P = \frac{T^2}{8} = \frac{1}{8}(62600.04) = 7825.005,$$

$$S_T = Q_T - P = 4.895,$$

$$S_A = \frac{1}{2}(K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 + K_4^2) - P$$

$$= \frac{1}{2}(3918.76 + 3856.41 + 3868.84 + 4006.89) - 7825.005 = 0.445,$$

$$S_B = \frac{1}{8}(K_1 - K_2)^2 = \frac{1}{8}(127.40 - 122.80)^2 = 2.645,$$

$$S_C = \frac{1}{8}(124.50 - 125.70)^2 = 0.18,$$

$$S_4 = \frac{1}{8}(123.60 - 126.60)^2 = 1.125,$$

$$S_5 = \frac{1}{8}(126.10 - 124.10)^2 = 0.500,$$

$$S = S + S = 1.625$$

第三节：混合型正交设计的方差分析

方差分析表：

方差来源	离差平方和	自由度	平均离差平方和(均方)	F值	临界值	显著性
A	0.445	3	0.148	0.182	$F_{0.05}(1,2)$ =18.51	
B	2.645	1	2.645	3.255		[*]
C	0.18	1	0.18	0.222	$F_{0.10}(1,2)$ =8.53	
误差E	1.625	2	0.8125			
总和T	4.895	7				

从F值和临界值的比较看出，各因素均无显著影响，相对来说，影响大些。为提高分析精度，我们只考虑因素B，把因素A，C入误差。这样一来，S_E就变成$S_A + S_C + S_4 + S_5 = 0.445 + 0.18$ 1.125 + 0.500 = 2.250，再列方差分析表。

第三节：混合型正交设计的方差分析

方差分析表(2)：

方差来源	离差平方和	自由度	平均离差平方和(均方)	F值	临界值	显著性
B	2.645	1	2.645	7.053		*
误差E'	2.250	6	0.375			
总和T	4.895	7				

临界值 $F_{0.05}(1，6) = 5.99$, $F_{0.01}(1, 6) = 13.75$

从F值和临界值的比较来看，因素B就是显著性因素了。

因素影响从大到小的顺序为BCA，选定的最优方案应为$A_2B_2C_1$

第四节：拟水平法的方差分析

例5:

钢片在镀锌前要用酸洗的方法除锈。为了提高除锈效率，缩短时间，先安排酸洗试验。考察指标是酸洗时间。在除锈效果达求的情况下，酸洗时间越短越好。要考虑的因素及其水平如表

因素 水平	A H_2SO_4(g/l)	B HCL(g/l)	C 洗涤剂(70g/l)	D 槽温(°C)
1	300	12	OP牌	60
2	200	4	海鸥牌	70
3	250	8		80

选取正交表$L_9(3^4)$，将因素C虚拟1个水平。据经验知，海鸥牌OP牌的效果好，故虚拟第2水平并安排在第1列。

因素 / 试验号	1	C 1'	B 2	A 3	D 4	试验结果(酸洗时间) x_k /min
1	1	1	1	1	1	36
2	1	1	2	2	2	32
3	1	1	3	3	3	20
4	2	2	1	2	3	22
5	2	2	2	3	1	34
6	2	2	3	1	2	21
7	3	2	1	3	2	16
8	3	2	2	1	3	19
9	3	2	3	2	1	37
K_1		88	74	76	107	237
K_2		149	85	91	69	
K_3			78	70	61	
K_1^2		7744	5476	5776	11449	
K_2^2		22201	7225	8281	4761	
K_3^2			6084	4900	3721	
S		40.5	20.67	78	402.67	

第四节：拟水平法的方差分析

解：
$$Q_T=\sum_{k=1}^{9}x_k^2=6787\quad ,T=\sum_{k=1}^{9}x_k=237$$
$$P=\frac{T^2}{9}=\frac{1}{9}(56169)=6241$$
$$S_T=Q_T-P=6787-6241=546$$

虚拟水平的因素C的第1水平重复3次，第二水平重复6次。因此

差平方和为：$S_C=\frac{K_1^2}{3}+\frac{K_2^2}{6}-\frac{T^2}{9}=\frac{1}{3}(7744)+\frac{1}{6}(22201)-6241=40.5$

其余因素的离差平方和为
$$S_B=\frac{1}{3}(K_1^2+K_2^2+K_3^2)-\frac{T^2}{9}=\frac{1}{3}(5476+7225+6084)-6241$$
$$S_A=\frac{1}{3}(5776+8281+4900)-6241=78$$
$$S_D=\frac{1}{3}(11449+4761+3721)-6241=402.67$$

误差的离差平方和为：$S_E=S_T-(S_C+S_B+S_A+S_D)=4.16$

第四节：拟水平法的方差分析

方差分析表：

方差来源	离差平方和	自由度	平均离差平方和(均方)	F值	临界值	显著性
A	78.00	2	39.00	9.38	$F_{0.05}(2,1)=199.5$	
B	20.67	2	10.34	2.49	$F_{0.05}(1,1)=161.4$	
C	40.50	1	40.50	9.74	$F_{0.10}(2,1)=49.50$	
D	402.67	2	201.34	48.40	$F_{0.10}(1,1)=39.80$	(*)
误差E	4.16	1	4.16			
总和T	546.00	8				

从F值和临界值比较看出，各因素均无显著影响，相对来说，因的影响大些。我们把影响最小的因素B并入误差，使得新的误差和为$S_{E'} = S_E + S_B$，再列方差分析表

第四节：拟水平法的方差分析

方差分析表(2)：

方差来源	离差平方和	自由度	平均离差平方和(均方)	F值	临界值	显著性
A	78.00	2	39.00	4.71	$F_{0.05}(2,3)=9.55$	
C	40.50	1	40.50	4.89	$F_{0.05}(1,3)=10.13$	
D	402.67	2	201.34	24.32	$F_{0.01}(2,3)=30.82$	*
误差E'	24.83	3	8.28		$F_{0.10}(1,3)=5.54$	
总和T	546.00	8				

由此看出，因素D有显著影响，因素A，B均无显著影响。因素性的顺序为DCAB，最优方案为$A_3B_1C_2D_3$.

第四讲：稳健设计

第一节：稳健性和稳健设计

第二节：产品的三阶段设计

第三节：信噪比

第一节：稳健性和稳健设计

稳健性：

稳健性(robustness), 也叫鲁棒性，是指因素状况发生微小变差对变量影响的不敏感性。换句话说，产品性能与某个因素有关，因状态变化时，产品的性能也随之变化。如果因素状态的变化对产性能的影响不大，我们就说产品性能对该因素的变化是不敏感的又称是稳健性的，或说产品性能对该因素的变化具有稳健性。

如使产品性能对所用材质变差不灵敏，就能在一些情况下使用较廉的或低等级的材料；使产品对制造尺寸变差不灵敏，可以提高品的可制造性、降低制造费用；使产品对使用环境变化不灵敏，能保证产品使用的可靠性和降低操作费用；

第一节：稳健性和稳健设计

稳健设计：

在实际问题中存在不少误差因素，它们影响着产品质量。对这些
差因素可以采取两种办法：

1) 消除这些因素: 实际上往往很难做到，有的情况下，即使能做
也要花费很大力气和很高的费用，这是不值得的；

2) 尽量降低误差因素的作用，使产品性能因误差因素变化而变
敏感性最小。根据这种指导思想，对产品的性能、质量和成本综
考虑，选择出最佳设计，既提高了产品质量，又降低了成本，这
设计方法叫做稳健设计；

稳健设计是一种最优化设计方法，它的两个主要工具是信噪比和
交表，用信噪比作为特征数衡量质量，用正交表安排试验。

第二节：产品的三阶段设计

何谓三阶段设计：

三阶段设计就是在专业设计的基础上，用正交设计方法选择最数组合和最合理的容差范围，尽量用价格低廉的、低等级的零来组装整机的优化设计方法。

三阶段设计由以下三个阶段组成：

1) 系统设计 (system design)

2) 参数设计 (parameter design)

3) 容差设计 (tolerance design)

系统设计的设计质量由设计人员的专业技术水平和应用这些专识的能力所决定。三阶段设计的重点是参数设计和容差设计。

第二节：产品的三阶段设计

参数设计：

在系统设计的基础上，对影响产品输出特性值的各项参数及其水平运用DOE方法，找出使输出特性值波动最小的最佳参数水平组合种优化设计方法。

根据实践经验，零部件、元器件全部采用优质品，装出的整机不定就是优质品，这是因为整机质量不仅与元器件、零部件本身的量有关，更主要的是取决于参数水平的组合。参数设计就是要找参数水平的最佳组合，它是设计的重要阶段、核心阶段。

参数设计所用的主要方法就是正交设计法。具体步骤如下：

1) 分析、明确问题的要求，选择出因素及水平；

2) 选择正交表，按表头设计确定试验方案；

3) 具体进行试验，测出需要的特性值；

4) 进行数据分析；

第二节：产品的三阶段设计

<u>容差设计：</u>

容差设计又叫公差设计，是在参数设计完成之后再进行的一种
容差设计是对产品质量和成本(包括市场情况)进行综合考虑，
验设计方法找出各因素重要性的大小，据此给予各参数更合理
差范围。
在容差设计中，为减少用户的损失，需要计算质量损失，以便
差设计方案的优劣进行评价。

第二节：产品的三阶段设计

容差设计的步骤：

1) 针对参数设计所确定的最佳参数水平组合，根据专业知识设
可以选用的低廉的元器件进行试验设计和计算分析；
2) 为简化计算，通常都选取和参数设计中相同的因素为误差因
3) 选取正交表，安排误差因素，进行试验，测出误差值；
4) 方差分析：为研究误差因素的影响，对测出的误差值进行方
析；
5) 容差设计：根据方差分析的结果对各因素选用合适的元件。
A. 影响不显著的因素，可选用低等级。低价格的元件；
B. 对影响显著的因素要综合考虑；总之要使质量损失最小，成
可能低，按这个原则确定各因素的容限。

第三节：信噪比及其应用

信噪比的概念：

信噪比的概念首先是在无线电通信中提出来的。接收机输出功率
分成两部分：信号功率和噪声功率。理论上和实践中经常要考
号功率与噪声功率的比值，这个比值就叫做信噪比，通常用η

η = 信号功率/噪声功率 = S/N

在试验设计中采用信噪比是田口玄一于1957年提出来的。譬如
量中经常把(μ^2/σ^2)作为信噪比，这里μ是质量特征值的平均
是样本方差。

为使用方便，通常把这些量取常用对数再放大10倍作为信噪比，
记为η，但这时的单位是分贝(dB)，把η说成为信噪比的分贝

譬如 $\eta = 10\lg\dfrac{\mu^2}{\sigma^2}$

信噪比这个量，通常都是越大越好

第五讲：可靠性设计

第一节：可靠性和可靠度概念

第二节：故障的统计分布函数

第三节：可靠度的计算

第四节：可靠度函数与故障率

第五节：可靠性设计

第六节：可靠性试验

第一节：可靠性和可靠度概念

产品的质量指标可分为两类:

性能指标------产品完成规定功能所需要的指标

例如：电视机的图象、彩色、音质、选择性能等

可靠性指标------产品性能随时间的保持能力

例如：电视机的平均寿命

元器件的失效率

100台计算机开始工作　　仍有95台在工作

t=0　　t=1000

第一节：可靠性和可靠度概念

可靠性:

产品在规定条件下和规定的时间内完成规定功能的能力，称为产
的可靠性。(可靠性的概率度量称为可靠度。)

规定的条件：常指使用条件、维护条件、环境条件和操作技术等
不同条件下，产品的可靠性不同；
规定的条件是比较可靠性高低的条件；

规定的时间：这是可靠性的核心，不谈论时间就无可靠性可言，
靠性是关于时间的质量。

例如：火箭发射系统，只要在十分钟内把火箭送上轨道即可；
海底电缆，要求在几十年内可靠；
家用电器，有几万小时可靠，顾客也就满意了。

第一节：可靠性和可靠度概念

可靠度:

是指元器件、设备或系统在给定条件下和规定的时间内完成规定
能的概率。

1）工作可靠度R_o(Operational Reliability)：这是实际使用时
机器的可靠度。

2）固有可靠度R_i(Inherent Reliability)：这是产品内在的可
是厂家在生产过程中已经确立下来的可靠度，它是系统、产品
业规划阶段就已确立的指标，是综合其它指标后的可靠性指标。

3）使用可靠度R_u(Use Reliability)：它与产品的使用有关，与
装、运输、保管、环境、操作情况、维修等因素有关。

$$R_o \approx R_i \times R_u$$

第二节：故障的统计分布函数

设：

N_0： 参加产品试验的总数； $N_0=N_f(t)+N_i(t)$

$N_f(t)$： t 时刻累积故障数；

$N_i(t)$： t 时刻未失效仍正常工作的数目；

$\Delta N_f(t)$： t 到t+Δ t 时间间隔内发生的故障数；

则：

单位时间内失效产品数占参加产品试验总数的频率为：

$$\frac{\Delta N_f(t)}{N_0 \Delta t}$$

产品在t 时刻的故障概率密度f(t)为：

$$f(t) = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{1}{N_0} \frac{dN_f(t)}{dt}$$

第二节：故障的统计分布函数

可靠度R(t)：即产品至时刻t 不发生故障的概率

$$R(t) = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{N_i(t)}{N_0}$$

累积故障概率F(t)：即产品至时刻 t 累积发生故障的概率

$$F(t) = \lim_{N_0 \to \infty} \frac{N_f(t)}{N_0} = \int_0^t f(t)dt = 1 - R(t)$$

第二节：故障的统计分布函数

故障率λ(t)：产品至时刻t，单位时间内发生故障的产品数
在正常工作的产品数之比，即产品工作到某个时间后，单位
间内发生故障的概率。

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_i(t)} \text{ X } \frac{dN_f(t)}{dt}$$

关系：

$$\lambda(t) = \frac{1}{N_i(t)} \text{ X } \frac{dN_f(t)}{dt} = \frac{dN_f(t)}{N_0 dt \cdot \frac{Ni(t)}{N_0}} = \frac{f(t}{R(}$$

第三节：可靠度的计算

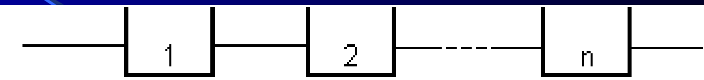
可靠度的计算:

设可靠度为R，累积故障概率为F，R+F=1.

我们就元件构成系统的不同类型，讨论系统与元件之间可靠度的
系。假设各元件故障的发生是独立的，记E_i为元件i成功运转事
$R_i = P(E_i)$ 为元件i 的可靠度，$F_i=P(\bar{E}_i)$为元件i 的累积故障概
R_s为系统的可靠度，F_s为系统的累积故障概率。

第三节：可靠度的计算

可靠度的计算(2)：



串联系统

串联方式:设系统由多个元件构成，如果其中任一元件发生故障会导致整个系统发生故障，这种构成方式称为串联方式。

假设系统由n个元件串联而成，则有 $R_S = P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n)$

由于事件的独立性，有 $R_S = P(E_1)P(E_2)\ldots P(E_n) = R_1R_2\ldots R_n$

由于R_i<1(I=1,2,…,n)，　所以系统的可靠度随着元件个数的增下降

计算串联方式可靠度的近似方法:

1）假设构成系统的n件元件的故障率都相等，记为q,则 $R_S = (1 -$

假定q很小，利用二项式展开，再忽略q的高次项，则 $R_S \approx 1 -$

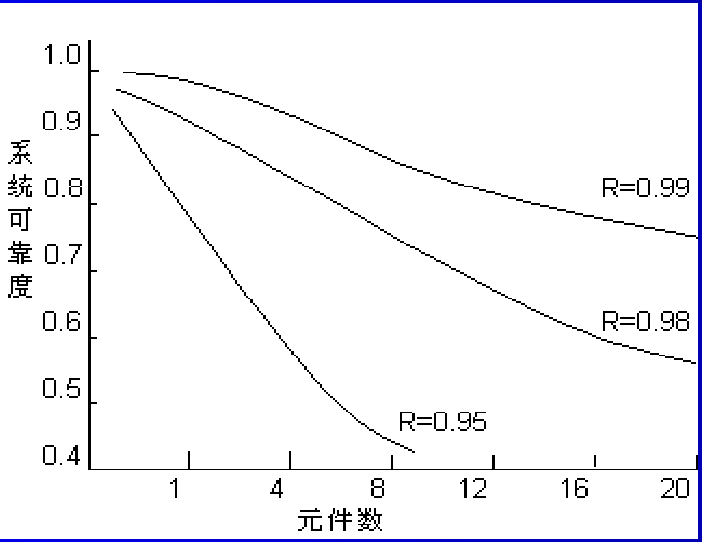
2）假设各元件的累积故障率为q_i，则有 $R_S \approx 1 - \sum^{n} q_i$

第三节：可靠度的计算

可靠度的计算(3)：

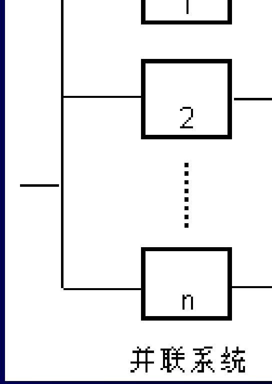
要提高系统的可靠度R_S，可以从两方面考虑：

1）减少串联元件个数；2）提高各元件的可靠度；



由于元件数目增加而引起系统可靠度的降低在图上表现得很明显

对同样数量的元件，元件可靠度的提高，可使系统的可靠度提高



第三节：可靠度的计算

可靠度的计算(4)：

并联方式:设系统由多个元件构成，如果其中某一元件发生故障
统仍能正常工作，只有当所有元件都发生故障时，系统才不能正
工作，这种构成方式称为并联方式。

假设系统由n个元件并联而成，则有 $F_S = P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \ldots \cap \overline{E}_n)$

由于事件的独立性，有 $F_S = P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2)\ldots P(\overline{E}_n) = F_1 F_2 \ldots F_n$

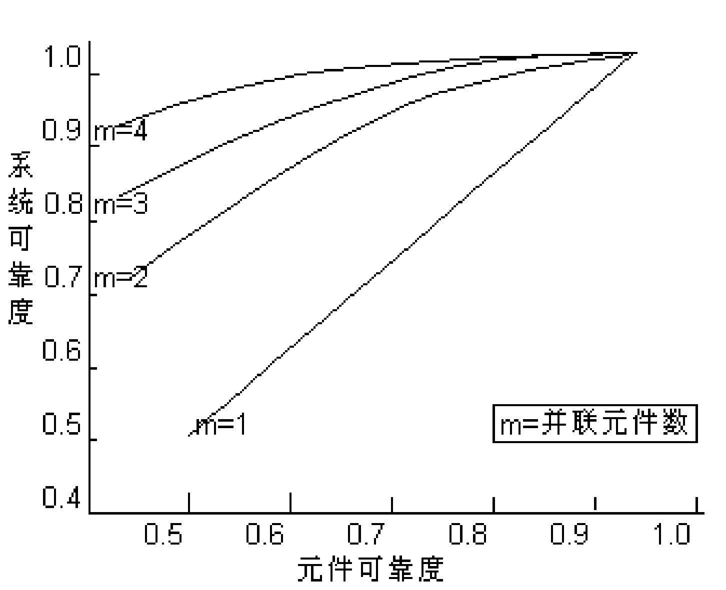
而 $R_S = 1 - F_S, F_i = 1 - R_i$

$$R_S = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i)$$

由于$F_i<1$， 因此系统的累积故障概率随着元件个数的增加而下
所以系统的可靠度提高，因此并联方式可作为提高系统可靠度的
种手段，这叫冗余性。

第三节：可靠度的计算

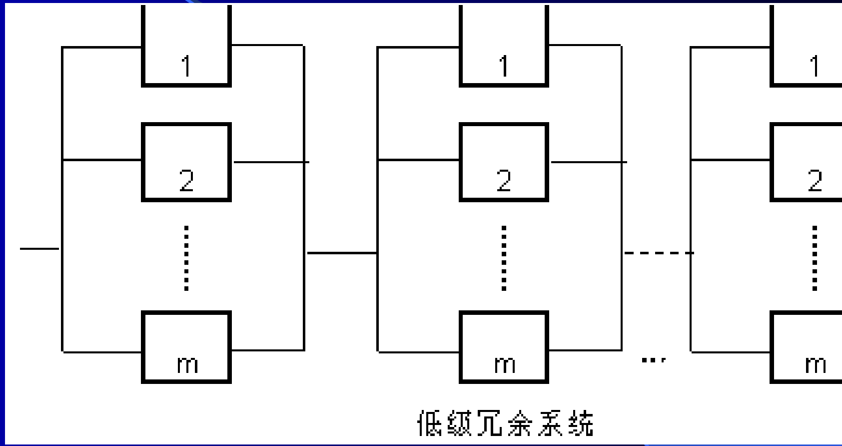
可靠度的计算(5)：



对并联系统，虽然各零件的可靠度不算太高，随着零件个数的增
系统的可靠度迅速提高。

第三节：可靠度的计算

可靠度的计算(6)：



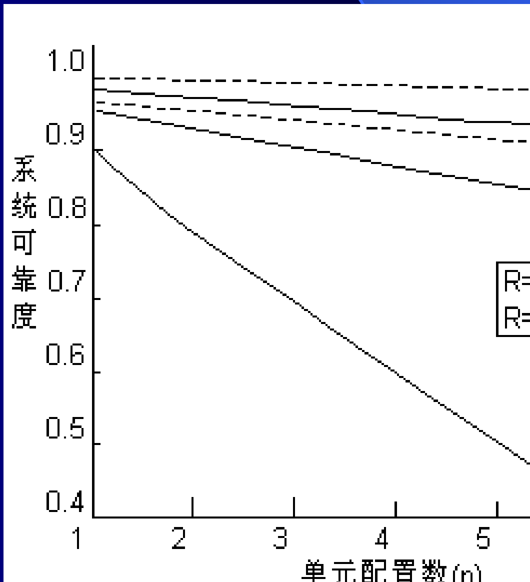
串-并联方式:假定有mX n个元件的系统，采取串联、并联两种方式构成，分两种情况考虑。

(1) 先并联再串联(低级冗余)

假设每个元件的可靠度都是 R，则每个并联组合的可靠度为 $R_{EQ}=1-(1-R)^m$

系统的可靠度为 $R_S=[1-(1-R)^m]^n$

对不同的元件可靠度R，在不同的m, n时所对应的系统可靠度关系如图所示。



第三节：可靠度的计算

可靠度的计算(7)：

(2) 先串联再并联(高级冗余)

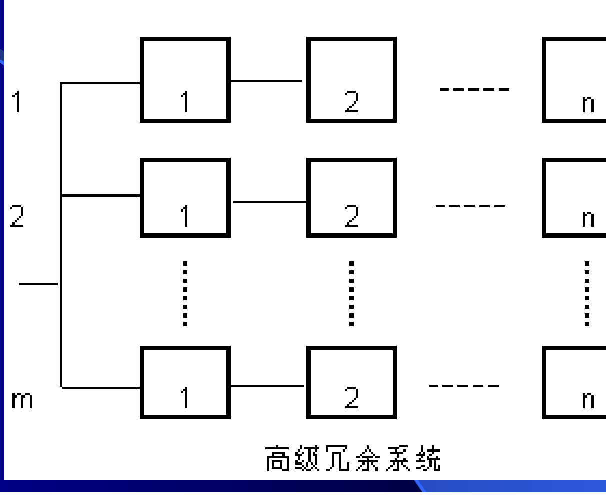
假设每个元件的可靠度都是 R，

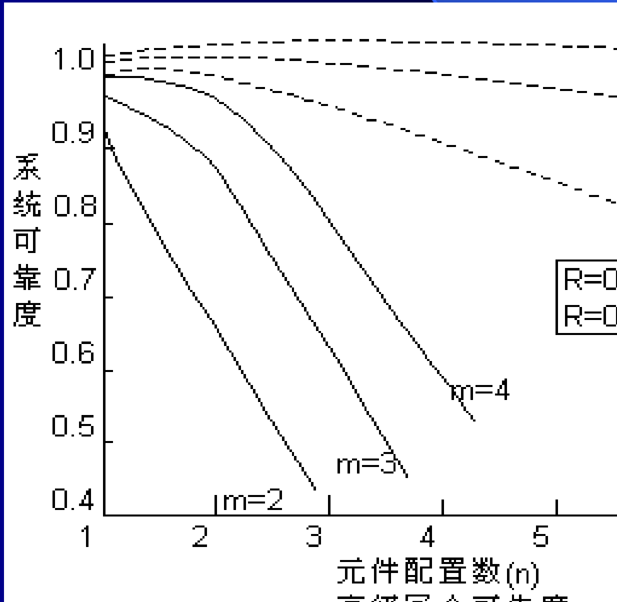
则每个并联组合的可靠度为 $R_{EQ} = R^n$

系统的可靠度为 $R_S = 1-(1-R^n)^m$

对不同的元件可靠度R，在不同的m, n时所对应的系统可靠度关系如图所示。

在所有情况下，低级冗余比高级冗余都有较高的可靠度。因此，提供备用元件比提供备用组合有更好的整体可靠性。





第四节：可靠度函数与故障率

故障率曲线：

例：

现取1000个零件进行试验，观察随着时间的变化出现故障的情况，把测到的数据列在表中。

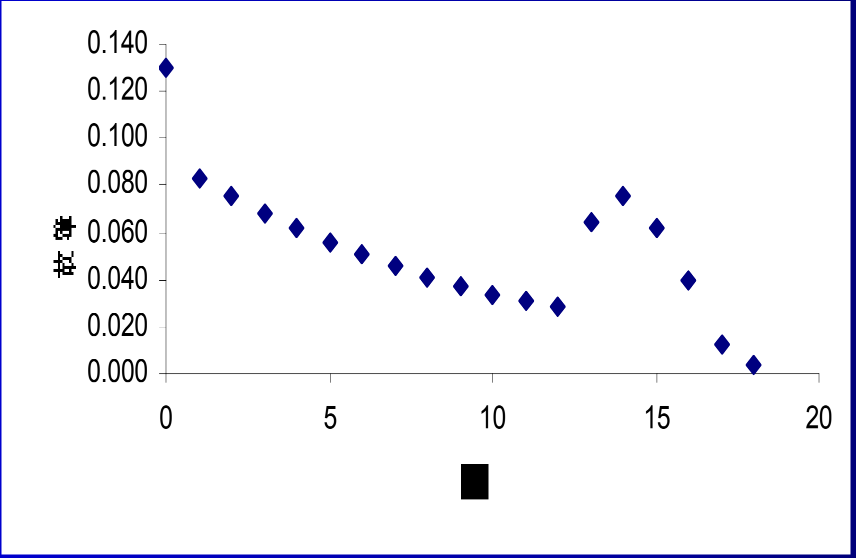
从表中(2)栏的数看出，开始故障较多，然后逐渐减少，并在一定范围内有较稳定的情况，然后故障数再次增多，直到结束。

(1) 时间 t	(2) 一定时间的故障率	(3) 累 积 故障数	(4) 剩 余 零件数	(5) 故障密度函数值	(6) 可靠度(%
0	0		1000		100.0
1	130	130	870	0.130	87.0
2	83	213	787	0.083	78.7
3	75	288	712	0.075	71.2
4	68	356	644	0.068	64.4
5	62	418	582	0.062	58.2
6	56	474	526	0.056	52.6
7	51	525	475	0.051	47.5
8	46	571	429	0.046	42.9
9	41	612	388	0.041	38.8
10	37	649	351	0.037	35.1
11	34	683	317	0.034	31.7
12	31	714	286	0.031	28.6
13	28	742	258	0.028	25.8
14	64	806	194	0.064	19.4
15	76	882	118	0.076	11.8
16	62	944	56	0.062	5.6
17	40	984	16	0.040	1.6
18	12	996	4	0.012	0.4

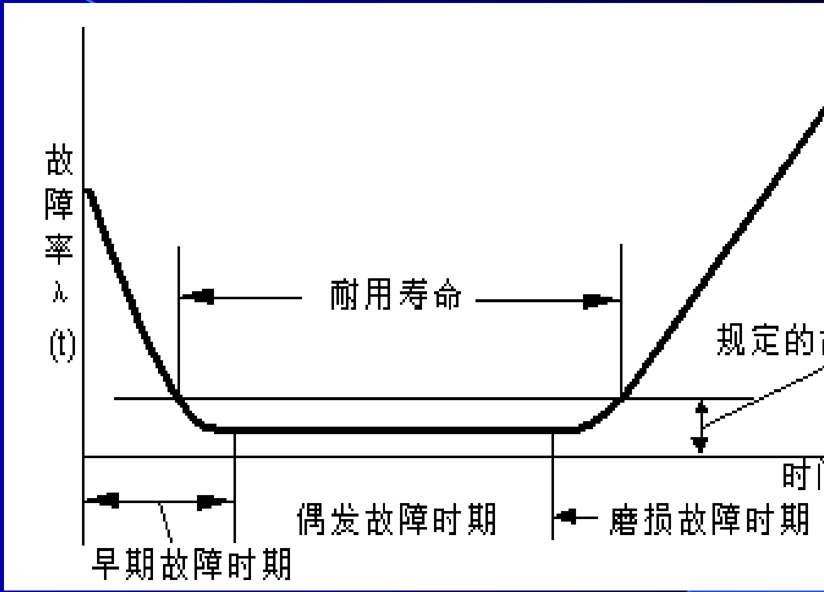
第四节：可靠度函数与故障率

故障率曲线(2)：

图中故障率开始高，然后有一段平稳，最后又有一段升高，把
画成一条连续曲线得出故障率曲线，它的形状象浴盆，又称为
盆曲线。



第四节：可靠度函数与故障率



故障率曲线(3)：

这个曲线分三段

1） 早期故障时期

使用初期故障率比较高的时期，它是由于机器内在的设计错误，原材料、工艺产生的缺陷造成的

2） 偶发故障时期：使用的中间过程中故障率较低，且状态较稳时期。故障的发生是随机的。

3） 磨损故障时期：机器使用后期，故障率再次升高的时期，由过长期的使用，机器磨损严重，化学变化、老化等原因，使增多，这时期已接近寿命的完结。

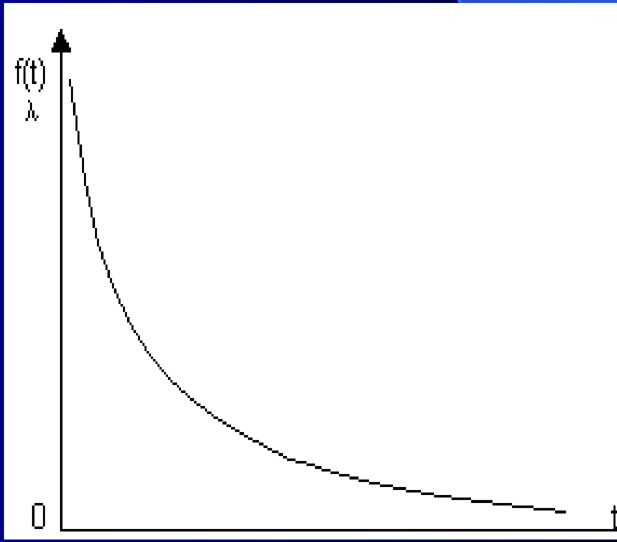
第四节：可靠度函数与故障率

几个重要分布的可靠度密度函数和故障率：

1）指数分布：$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ （$\lambda > 0$）

可靠度函数为 $$R(t) = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

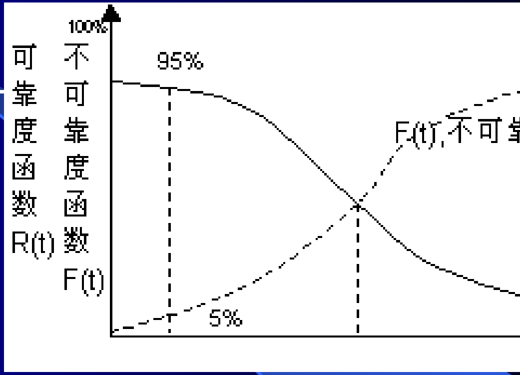
故障率为 $$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$



即指数分布的故障率是常量。

对于指数分布，串联系统的故障率等于各元件故障率之和。这就是指数分布中故障率的可加性。

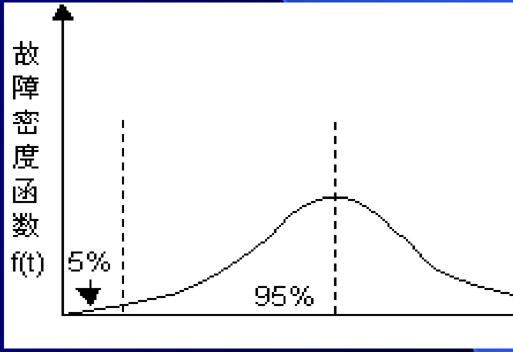
第四节：可靠度函数与故障率



几个重要分布的可靠度函数和故障率(2)

2） 正态分布：

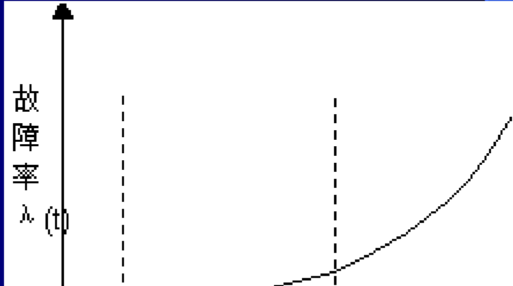
密度函数 $$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<t<+\infty$$



故障分布函数 $$F(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}d\tau}=\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$$

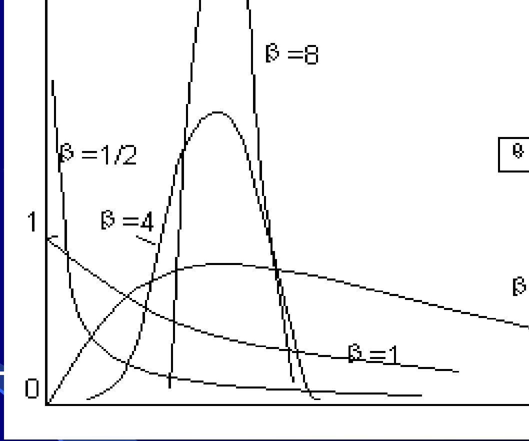
它的可靠度函数为

$$R(t)=1-F(t)=1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$$



故障率为 $$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)}$$

第四节：可靠度函数



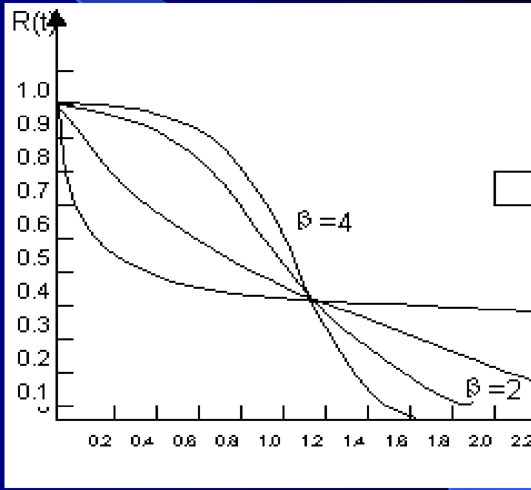
几个重要分布的可靠度函数和故障率(3)

3） 威布尔分布：

密度函数

$$f(t)=\frac{\beta(t-\delta)^{\beta-1}}{(\theta)^{\beta}}\exp\left[-\left(\frac{t-\delta}{\theta}\right)^{\beta}\right],$$

$$t\geq\delta\geq 0,\beta\geq 0,\theta>0$$

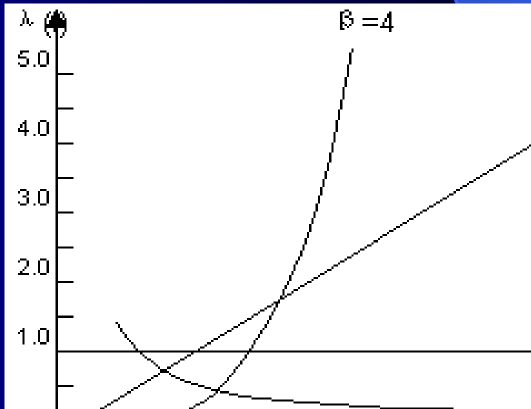


故障分布函数

$$F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau=1-\exp\left[-\left(\frac{t-\delta}{\theta}\right)^{\beta}\right]$$

它的可靠度函数为

$$R(t)=1-F(t)=\exp\left[-\left(\frac{t-\delta}{\theta}\right)^{\beta}\right]$$



故障率为

$$\lambda(t)=\frac{\beta(t-\delta)^{\beta-1}}{\theta^{\beta}}$$

第四节：可靠度函数与故障率

几个重要分布的可靠度函数和故障率(4)：

4） 离散型的可靠度函数和故障率：

类似于连续型分布，若离散型的分布律为p_k

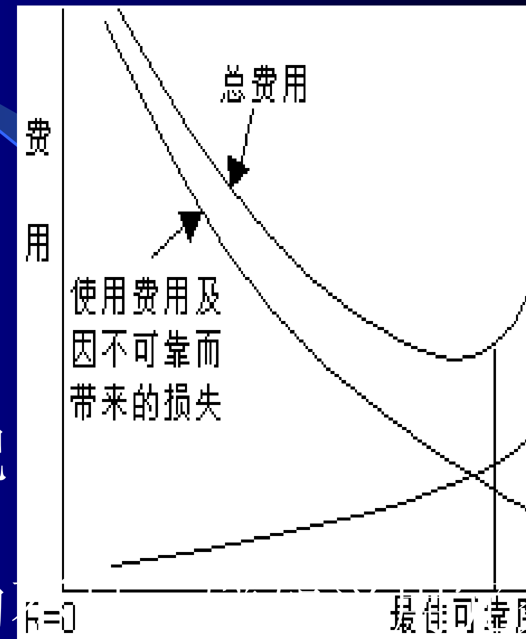
(二项分布为 $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $p_k = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 泊松分布为)

则可靠度函数为 $R(k) = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$ 故障率为 $\lambda(k) = \dfrac{p_k}{R(k)} = \dfrac{p_k}{\sum_{i=k}^{\infty} p_i}$

第五节：可靠性设计

<u>一般概念:</u>

事前考虑可靠性的一种设计方法。



进行可靠性设计首先要考虑的几个问题：
1) 仔细调查了解能够得到的元件的可靠度。
2) 根据总目标要求和实际状况，正确地分配各元件的可靠度。
3) 必要时采用适当的手段弥补元件可靠度的连接方式，甚至改变系统的结构等。
4) 实在不行时，要重新研究和开发可靠度更高的元件。

第五节：可靠性设计

平均寿命：
产品投入使用到发生故障的平均工作时间。

不可修复系统MTTF (Mean Time To Failure): 失效前平均工作

$$MTTF = \int_0^\infty t\, f(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt$$

若产品的故障概率密度f(t)按指数分布，且λ(t)=常数时，

$$MTTF=1/\lambda$$

第五节：可靠性设计

可修复系统MTBF (Mean Time Between Failure)

对一系统，在发生故障后，如果经过维修能够恢复到正常状态，
种系统称为可修复系统。
可修复系统的维修工作难易不同，表征维修难易程度的量叫维
，记作M, 即可修复系统在规定条件下和在规定时间内完成维修
率。
系统维修后恢复正常工作,工作一段时间以后又会发生故障，两
障之间的时间 叫故障间隔，它是一个随机变量，各故障间隔的
值，叫平均故障间隔，记为MTBF。.
若系统的可靠度为R(t)，则有

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R(t)dt$$

若T服从参数为的指数分布，则

$$MTBF = \int^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\ }$$

第五节：可靠性设计

<u>例:</u>

一系统由三个子系统A，B，C串联而成，它们的寿命都服从
分布。要求系统的MTBF在 50h 以上，已知A，B 的 MTBF
为 200h，400h，试求C的MTBF。

第五节：可靠性设计

解:

设A，B，C的故障率分别为λ_A，λ_B，λ_C，系统的故障率为λ

已知$(MTBF)_A=200h$, $(MTBF)_B=400h$，根据公式得知：

$(MTBF)_A=1/\lambda_A$, $(MTBF)_B = 1/\lambda_B$

所以$\lambda_A= 1/200 = 0.005$, $\lambda_B= 1/400 = 0.0025$

又 $\lambda = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C$

$\lambda = 1/50 = 0.02$

所以 $\lambda_C = \lambda - \lambda_A - \lambda_B = 0.02 - 0.005 - 0.0025 = 0.0125$

因此 $(MTBF)_C = 1/\lambda_C= 1/0.0125 = 80$ (h)

这就是说，应将子系统C的平均故障间隔定在80h以上。

第五节：可靠性设计

元器件的选用:

系统的可靠性受多方面因素的影响，最关键的是元器件的可靠
在筛选合格的元器件时，有的元器件参数、性能并不稳定，其
主要是参数飘移。这些元器件需要放一段时间或工作一段时间
能稳定。这种使参数性能稳定的过程叫老炼。元器件是否要进
炼，主要取决于这种元器件的参数飘移是否影响产品使用的可
如果没有影响，就可以不进行老练；反之，就要进行老炼。

第五节：可靠性设计

元器件的正确使用:

元器件选好之后，下一步就是如何在设计中正确使用这些元器
设计人员必须对元器件的质量、使用方法和关键的技术指标有
的了解，不要超负荷工作。为了使元器件的使用寿命进一步提
对关键的指标必须降额使用。

为了提高系统的可靠性，必须尽量减少元器件的数目，尽可能
化系统的结构。

第五节：可靠性设计

<u>固有可靠度的设计:</u>

我们知道产品的工作可靠度近似地等于固有可靠度与使用可靠度
乘积。我们所说的可靠度设计就是为实现固有可靠度的目标值而
行的设计。在设计中应当注意：

1) 要对类似的系统进行调查研究，了解过去发生故障的情况，分
   故障的原因及该故障对系统的影响；
2) 尽量使用标准化元件，因为标准化元件性能可靠；
3) 系统结构要尽量简单、合理。一般来说结构越简单，故障率越
4) 分配元件的可靠度要适当，特别是元件较多时；
5) 元件的可靠度达不到一定标准时，适当采用冗余结构；
6) 设计的结构要便于使用、检查和维修；

第五节：可靠性设计

固有可靠度的设计(2):

7) 明确使用的环境条件和功能限度；
8) 确定贮存条件(如温度、湿度的要求)和贮存的期限；
9) 确定适当的包装(包装材料、包装方法等)；
10) 明确指出任务时间；
11) 指明预防保养，确定元件的更换期，在进入磨损期前，就要
元件换下来；

第六节：可靠性试验(寿命试验)

目的:

1) 弄清产品的寿命分布；
2) 估计产品的各项可靠性指标。说明产品可靠性是符合定量要
3) 研究产品失效机理，发现产品设计、零部件、原材料和工艺
   的缺陷，以便采取有效的纠正措施，提高产品可靠性；

可靠性试验：从一批产品中随机抽取n个产品，在一定应力水平
定环境下进行试验，观察工作状态，对照事先确定的失效判据，
现有样品失效，立即记录其失效时间，最后用统计方法对失效
进行处理，对失效原因进行分析。

第六节：可靠性试验

可靠性试验
现场寿命试验
模拟寿命试验

1) 现场寿命试验：

它是把产品放在实际使用条件下来获得失效数据的试验，如飞
操纵杆，汽车的行驶里程等都是在现场寿命试验中进行的。如
到的寿命数据是珍贵的、最有说服力的。但此种试验的组织管
作繁重，投资大，时间长；

2) 模拟寿命试验：

又称实验室寿命试验。它是将现场使用的主要工作条件在实验
模拟，并受到人工控制，便利在实验室内参试样品都在相同工
件下进行寿命试验。如电子元件在恒温箱内作寿命试验，电缆
定电压下作寿命试验等等。此种试验管理简便，投资小，有重
便于产品间的比较；

第六节：可靠性试验

寿命试验
- *完全寿命试验*
- *截尾寿命试验*
- *加速寿命试验*

1) 完全寿命试验：

把n个投试样品试验到全部失效(包括故障，以后不再一一说
停止的试验，称为完全寿命试验，所获得的 n 个失效时间称
全样本。在完全样本基础上进行统计分析获得的可靠性指标
为可靠，但此种试验常需要较长的时间，譬如100 只晶体管
的寿命试验，若要获得完全样本，那需要很长时间，起码几
甚至几十年，等它们全部失效，新的晶体管可能已设计出来
所以这种试验不适应产品更新换代的要求，常不被采用。

第六节：可靠性试验

2) 截尾寿命试验：

把n个投试样品试验到部分失效就停止的试验，称为截尾寿命
验。在截尾寿命试验中，依先后记录的失效时间$t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq$
为截尾样本。其中r称为截尾数，一般r≤n，当r=n时，截尾寿
试验就成为完全寿命试验。

1) 定时截尾寿命试验：又称I型截尾寿命试验。它是指试验到
定时间就立即停止试验。这时样本中的失效个数是随机的，
无法知道；

2) 定数截尾寿命试验：又称II型截尾寿命试验。它是指试验到
定的失效个数达到时停止。这时试验停止时间是随机的。

第六节：可靠性试验

*有替换试验

假如在截尾寿命试验中还考虑失效产品是否允许替换，这又
替换试验与有替换试验之分。进行有替换试验主要是为了获
多的试验信息。

假如投试样品为n，按有无替换和截尾方式，可以组合成如下
种截尾寿命试验：

(n，无，时) --- 取n个产品进行无替换定时截尾寿命试验；

(n，无，数) --- 取n个产品进行无替换定数截尾寿命试验；

(n，有，时) --- 取n个产品进行有替换定时截尾寿命试验；

(n，有，数) --- 取n个产品进行有替换定数截尾寿命试验；

第六节：可靠性试验

3) 加速寿命试验：

随着科学技术的发展，高可靠、长寿命的产品愈来愈多，截尾寿
试验也不能适应这种需要。譬如，不少电子元器件的寿命是很长
在正常工作温度 40ºC 下可达数百万小时以上，若取1000个这样
电子元器件， 那要进行数万小时的试验，可能只有一、二个失
甚至还会出现没有失效的情况。这些情况的出现对估计元器件的
靠性指标都是不利的，甚至很难给出估计。假如我们把工作温度
40ºC提高到60ºC，甚至80ºC，只要失效机理不变，由于工作环
变得恶劣一些，该电子元器件的失效个数会增多，这对估计低温
的可靠性指标是很有利的，此种在超过正常应力水平下的寿命试
称为加速寿命试验。

在加速寿命试验中，再采用截尾试验技术，就可使试验时间大大
短。

第六节：可靠性试验

例：

某厂制造一种新型绝缘材料，专家们预测其在正常工作温度150
下的平均寿命要达 10000 小时以上，为了获得平均寿命的估计
预计寿命试验要进行20000小时左右，这相当于要进行2年多时
在一般工厂里承受不了的。此绝缘材料的物理性能得知，适当地
高试验温度，可以加速绝缘材料的老化，从而使击穿时间提前到
达到缩短试验时间的目的。通过摸底试验得知，在高温270ºC下
绝缘材料的失效原因仍然是由于老化引起的，因此选取该温度作
加速应力是妥当的，而加速应力水平应在150ºC到270ºC间选取

第六节：可靠性试验

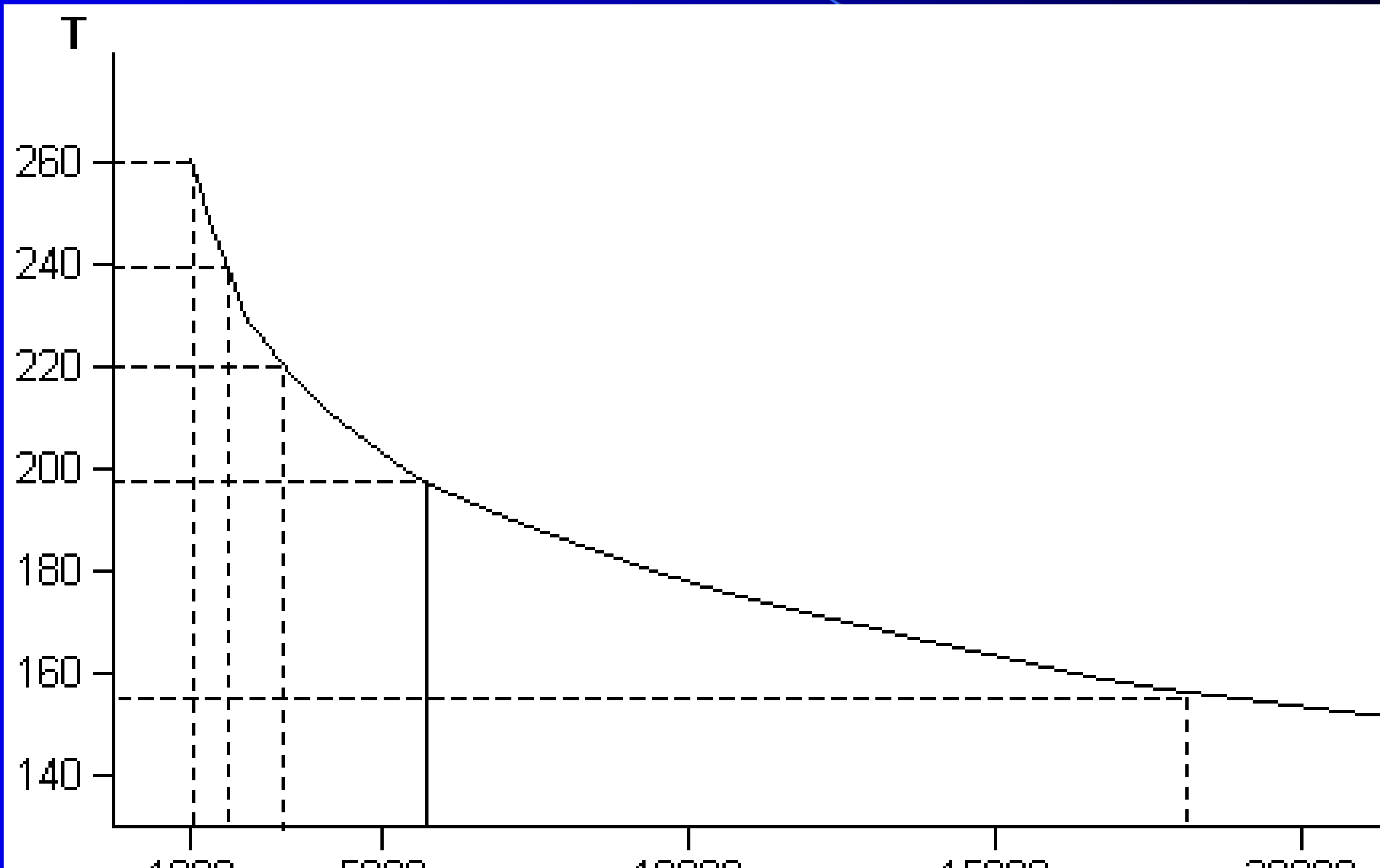
经研究决定，190ºC, 220ºC,240ºC和260ºC等四个温度水平作
速应力水平，在这四个温度水平下分别安排一个截尾寿命试验，
获得一个截尾样本，然后再设法估计各温度水平下的平均寿命。
得的平均寿命估计值如下：

i	T_i (ºC)	平均寿命 θ_i (h)
1	190	5046
2	220	2638
3	240	1572
4	260	1016

第六节：可靠性试验

进一步的工作可以从图上得到启发。以温度T作纵轴，平均寿命
横轴，把表上的数据点在该坐标纸上，可以看出一个明显的趋
随着试验温度T的下降，平均寿命θ在增加，假如把图上的四个
一条光滑的曲线联结起来，并顺势延长，那就可以看到，当试
度水平为150ºC时，其平均寿命大约为17000小时，这就是加速
试验全过程的简单缩影。从这个缩影可以看出加速寿命试验的
思想是：利用高应力水平下的平均寿命去外推正常应力水平下
均寿命。

第六节：可靠性试验



谢谢大家