第22卷第1期
2007年2月
成都信息工程学院学报
JOURNAL OF CHENGDU UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGY
Vol.22 No.1
Feb. 2007

文章编号：1671-1742(2007)01-0134-07

N-策略精益生产排队模型分析与设计

王 磊[1,2]， 王殿奎[3]

(1.南京大学商学院，江苏 南京 210093；2.南京市国有资产投资管理控股集团，江苏 南京 210093；3.江苏大学理学院，江苏 镇江 212013)

摘要：研究了精益生产环境下，生产线可能发生故障的单服务台N-策略M/M/1随机服务服务系统，利用概率母函数给出了模型的各项稳态指标；设计了预期费用函数，利用函数求解出当预期费用最少时的最优N-策略；并对模型进行了数值模拟。

关 键 词：精益生产；母函数；生产线；排队；N-策略；启动时间

中图分类号：O226 **文献标识码**：A

精益生产(Lean Production，LP)，又称精良生产，其中“精”表示精良、精确、精美；“益”表示利益、效益等等。精益生产就是及时制造，消灭故障，消除一切浪费，向零缺陷、零库存进军。它是美国麻省理工学院在一项名为“国际汽车计划”的研究项目中提出来的。在做了大量的调查和对比后，认为日本丰田汽车公司的生产方式是最适用于现代制造企业的一种生产组织管理方式，称之为精益生产，以针对美国大量生产方式过于臃肿的弊病。精益生产综合了大量生产与单件生产方式的优点，力求在大量生产中实现多品种和高质量产品的低成本生产。近年来，精益生产随着国内企业的发展与外企的引入，逐渐为国人所知。只是因为不同的理解与侧重点的不同，也有人称之为“JIT(Just In Time)生产方式”，“零库存生产方式”，“看板生产方式”等[1]。

1 N-策略

在一个精益生产企业里，消除一切浪费是企业追求的最终目标，因此在生产线启动费用和运行费用都较高时，N-策略是消除浪费的有效方式。

在M/M/1排队系统理论中，文献[3]最早引进N-策略：当系统内排队订单$\geqslant N(N\geqslant 1)$时，启动生产线，直到系统内订单数再次为0时生产线停止工作。生产线停止运行后，直到系统内再次达到N个顾客时运行。文献[5]在上面研究的基础上又研究了带指数启动时间的情况：系统内顾客达到N个后，生产线不能马上开始服务订单，而是经过一个服从负指数分布的启动时间来完成辅助工作，启动时间结束后，生产线马上开始服务订单，直到系统再次为空为止。

研究了一种新的排队模型，假定订单到达为参数为λ的泊松流，服务时间服从参数为$1/\mu$的负指数分布，当系统内订单数达到N时，生产线开始启动，起动时间为t，t服从一个参数为τ的负指数分布，一旦起动时间结束，生产线马上开始服务订单(无差错的完成订单的概率为ϕ，若有差错，订单返回队列重新接受服务，重新服务时间仍服从参数为$1/\mu$的负指数分布)，直到系统再次为空。生产线运行时以泊松强度v出现故障，一旦故障发生，以下3个事件随之发生：(1)生产暂停；(2)正在生产的订单退回到排队列的队首；(3)立即开始维修生产线。维修时间服从参数为ω的负指数分布。生产线每次只能服务一份订单，订单按照到达顺序排成单队等待，服务规则是先到先服务。

2 稳态结果

系统状态用(i,n)，$i=0,1,2$，$n=0,1,2\cdots$表示，其中$i=0$表示生产线关闭，$i=1$表示生产线运行并且正常

收稿日期：2006-05-25
基金项目：国家自然科学基金资助项目(70571030)

工作,$i=2$ 表示运行过程中出现故障。n 表示系统内的订单数。

稳态记号:

$p_0(n)$:生产线空闲时系统中的订单数为 n 的概率 $n=1,2,3,\cdots,N-1$,

$p_0(n)$:生产线启动时间内系统中的订单数为 n 的概率 $n=N,N+1,N+2,\cdots$

$p_1(n)$:生产线运行并且正常工作时($i=1$)系统中的订单数为 n 的概率 $n=1,2,3,\cdots$

$p_2(n)$:生产线运行过程中出现故障时($i=2$)系统中的订单数为 n 的概率 $n=1,2,3,\cdots$

状态转移图如图1所示。

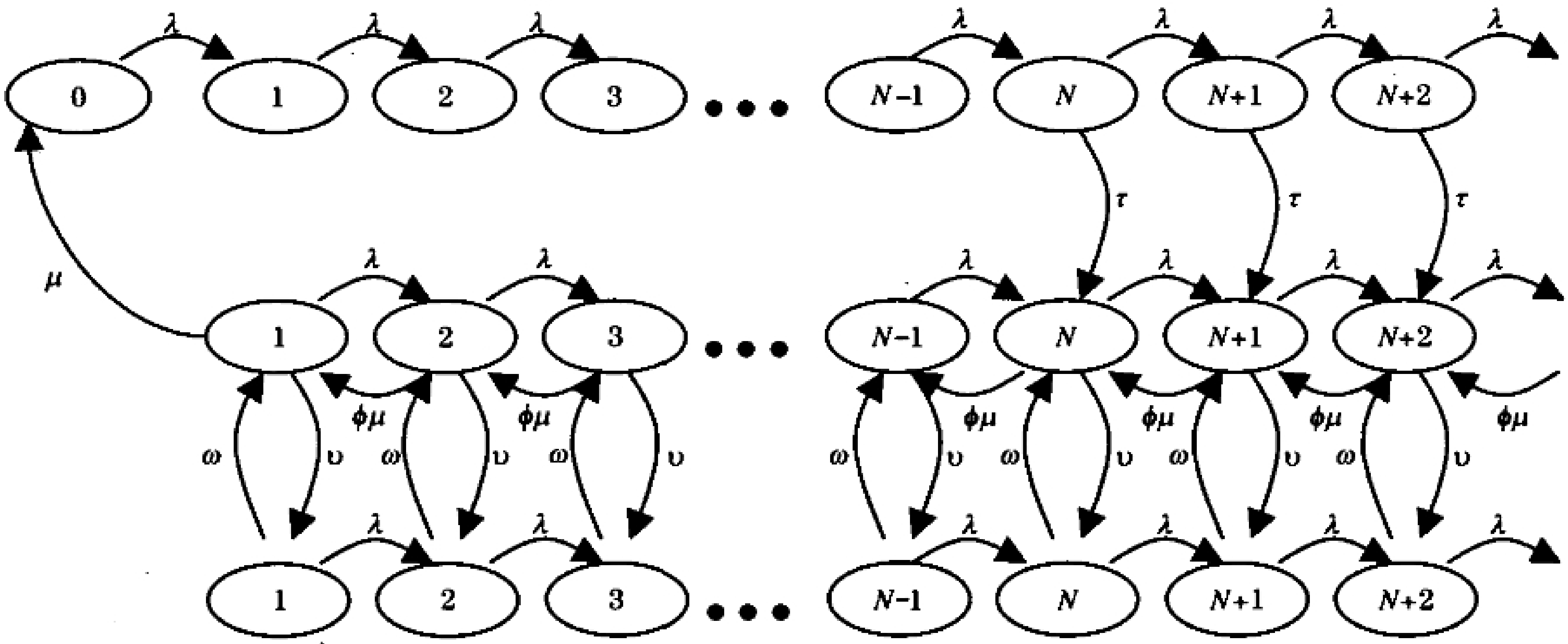

图1 状态转移图

平衡方程:

$$\lambda p_0(0)=\phi\mu p_1(1) \tag{1}$$

$$p_0(n-1)=p_0(n),1\leqslant n\leqslant N-1 \tag{2}$$

$$\lambda p_0(n-1)=(\lambda+\tau)p_0(n),n\geqslant N \tag{3}$$

$$(\lambda+\phi\mu+v)p_1(1)=\phi\mu p_1(2)+\omega p_2(1) \tag{4}$$

$$(\lambda+\phi\mu+v)p_1(n)=\lambda p_1(n-1)+\phi\mu p_1(n+1)+\omega p_2(n),2\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5}$$

$$(\lambda+\phi\mu+v)p_1(n)=\tau p_1(n)+\lambda p_1(n-1)+\phi\mu p_1(n+1)+\omega p_2(n),n\geqslant N \tag{6}$$

$$(\lambda+\omega)p_2(1)=vp_1(1) \tag{7}$$

$$(\lambda+\omega)p_2(n)=\lambda p_2(n-1)+vp_1(n),n\geqslant 2 \tag{8}$$

2.1 概率母函数

用递归方法求解线性方程组(1)~(8)非常困难,故采用概率母函数法,需要用到的母函数表述如下:

$$G_I(Z)=\sum_{n=0}^{N-1}Z^n p_0(n),Z\leqslant 1,$$

$$G_s(Z)=\sum_{n=N}^{\infty}Z^n p_0(n),Z\leqslant 1,$$

$$G_B(Z)=\sum_{n=1}^{\infty}Z^n p_1(n),Z\leqslant 1,$$

$$G_D(Z)=\sum_{n=1}^{\infty}Z^n p_2(n),Z\leqslant 1,$$

由方程(2)和(3)得

$$G_I(Z)=\frac{1-Z^N}{1-Z}p_0(0) \tag{9}$$

$$G_S(Z)=\frac{\lambda Z^N}{\lambda+\tau-\lambda Z}p_0(0) \tag{10}$$

将方程(4)等号两端同乘 Z^2,方程(5)和方程(6)等号两端同乘 Z^{n+1},然后将所有方程逐次相加,整理得:

$$(\lambda+\tau-\lambda Z)[\lambda Z^2-(\lambda+\tau+\phi\mu)Z+\phi\mu]G_B(Z)+\omega Z(\lambda+\tau-\lambda Z)G_D(Z)$$
$$=\lambda Z(\lambda+\tau-\lambda Z-\tau Z^N)P_0(0) \tag{11}$$

同理将方程组(7)等号两端同乘 Z,方程组(8)等号两端同乘 Z^n,然后将所有方程逐次相加,整理得:

$$vG_B(Z)+(\lambda Z-\lambda-\omega)G_D(Z)=0 \tag{12}$$

联立方程(11)~(12)式,解得 $G_B(Z)$和 $G_D(Z)$

$$G_B(Z)=\frac{\lambda Z(\lambda Z-\lambda-\omega)(\lambda+\tau-\lambda Z-\tau Z^N)}{(\lambda+\tau-\lambda Z)\{[\lambda Z^2-(\lambda+\tau+\phi\mu)Z+\phi\mu](\lambda Z-\lambda-\omega)-v\omega Z\}}P_0(0) \tag{13}$$

$$G_D(Z)=\frac{-\lambda vZ(\lambda+\tau-\lambda Z-\tau Z^N)}{(\lambda+\tau-\lambda Z)\{[\lambda Z^2-(\lambda+\tau+\phi\mu)Z+\phi\mu](\lambda Z-\lambda-\omega)-v\omega Z\}}P_0(0) \tag{14}$$

将 $Z=1$ 分别代入(9)式,(10)式,(13)式和(14)式,除去(10)式外各式的分子,分母都为零,用洛必达法则(L'Hospital's rule)一次得到:

$$G_I(1)=Np_0(0) \tag{15}$$

$$G_S(1)=\frac{\lambda}{\tau}p_0(0) \tag{16}$$

$$G_B(1)=\frac{\rho\omega}{Q[\omega-\rho(v+\omega)]}P_0(0) \tag{17}$$

$$G_D(1)=\frac{\rho v}{Q[\omega-\rho(v+\omega)]}P_0(0) \tag{18}$$

其中:

$$\rho=\frac{\lambda}{\phi\mu}$$

$$Q=\frac{\tau}{\lambda+N\tau}=\frac{1}{N+\delta}\qquad(\delta=\frac{\lambda}{\tau})$$

令 $G(Z)$表示系统中顾客数的概率母函数,则:

$$G(Z)=G_I(Z)+G_S(Z)+G_B(Z)+G_D(Z)$$

由条件 $G(1)=1$ 可以求得 $P_0(0)$:

$$1=G_I(1)+G_S(1)+G_B(1)+G_D(1) \tag{19}$$

将(15)~(18)式代入(19)式得:

$$P_0(0)=\frac{Q[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega} \tag{20}$$

$\delta=\frac{\lambda}{\tau}$表示在生产线的启动时间内到达的订单数。如果系统启动时间为零,那么期间到达的订单数也为零,即 $\delta=\frac{\lambda}{\tau}=0$。同时注意到几个关于 $P_0(0)$的结果:(1)若令 $Q=1/N$, $v=0$,则 $P_0(0)$是 N 策略可靠生产线 M/M/1 排队模型中的结果;(2)若令 $Q=1/N$,则 $P_0(0)$是 N 策略可修生产线 M/M/1 排队模型中的结果;(3)若令 $=0$,则 $P_0(0)$是 N 策略可靠生产线且有指数启动时间的 M/M/1 排队模型中的结果。

2.2 求解 P_I,P_S,P_B,P_D

在稳态下,令 P_I 表示生产线处于闲期的概率,P_S 表示生产线处于启动时间的概率,P_B 表示生产线运行并且正常工作的概率,P_D 表示生产线处于故障状态的概率。

那么分别给出 P_I,P_S,P_B,P_D 的表达式如下:

$$P_I=\sum_{n=0}^{N-1}p_0(n)=G_I(1)$$

$$P_S=\sum_{n=N}^{\infty}p_0(n)=G_S(1)$$

$$P_B=\sum_{n=1}^{\infty}p_1(n)=G_B(1)$$

$$P_D=\sum_{n=1}^{\infty}p_2(n)=G_D(1)$$

由(15)~(18)式和(20)式,得到:

$$P_I=\frac{QN[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega}=\frac{N[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)} \tag{21}$$

$$P_S=\frac{Q\lambda[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega\tau}=\frac{\delta[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)} \tag{22}$$

$$P_B=\rho \tag{23}$$

$$P_D=\frac{\rho v}{\omega} \tag{24}$$

2.3 求解 L_N

定义系统各个状态下的订单数的数学期望为:

L_I:生产线空闲时系统中订单数的数学期望;

L_S:生产线启动时间内系统中订单数的数学期望;

L_B:生产线运行并且正常工作时($i=1$)系统中订单数的数学期望;

L_D:生产线运行过程中出现故障时系统中订单数的数学期望;

L_N:系统中订单数的数学期望。

数学表达式:

$$L_I=\sum_{n=0}^{N-1} np_0(n)=G_I'(1),$$

$$L_S=\sum_{n=N}^{\infty} np_0(n)=G_S'(1),$$

$$L_B=\sum_{n=1}^{\infty} np_1(n)=G_B'(1),$$

$$L_D=\sum_{n=1}^{\infty} np_2(n)=G_D'(1),$$

$L_N=L_I+L_S+L_B+L_D$. 由式(2)和式(20)得:

$$L_I=\frac{N(N-1)}{2}P_0(0)=\frac{N(N-1)}{2}\times\frac{Q[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega} \tag{25}$$

利用(10)式 $G_S'(1)$求 L_S,

$$L_S=L_I=\frac{\lambda[\omega-\rho(v+\omega)]}{\tau\omega} \tag{26}$$

同理,利用(13)式 $G_B'(1)$求 L_B,

$$L_B=\frac{Q\rho N(N-1)}{2}+\frac{\lambda\rho}{\tau}+\frac{\rho(\omega^2+\lambda v\rho)}{\omega[\omega-\rho(v+\omega)]} \tag{27}$$

利用(14)式 $G_D'(1)$求 L_D,

$$L_D=\frac{Qv\rho N(N-1)}{2\omega}+\frac{\lambda v\rho}{\tau\omega}+\frac{\rho(v\omega-\lambda v-\lambda v\rho)}{\omega[\omega-\rho(v+\omega)]} \tag{28}$$

由(25)~(28)式得

$$L_N=L_I+L_S+L_B+L_D=\frac{QN(N-1)}{2}+\frac{\lambda}{\tau}+\frac{\rho(\lambda v+v\omega+\omega^2)}{\omega[\omega-\rho(v+\omega)]} \tag{29}$$

注意到,若令 $Q=1/N$,则 L_N 是 N 策略可修生产线 M/M/1 排队模型中的结果;若令 $v=0$,则 L_N 是 N 策略可靠生产线且有指数启动时间的 M/M/1 排队模型中的结果;

3 优化设计 N-策略

引入下列记号:

$E[I]$:生产线关闭时间长度的数学期望;

$E[S]$:生产线启动时间长度的数学期望;

$E[B]$:生产线运行并且正常工作时间长度的数学期望;

$E[D]$:生产线运行过程中出现故障时间长度的数学期望;

$E[C]$:生产线一个忙期长度的数学期望。

则有 $E[C]=E[I]+E[S]+E[B]+E[D]$

求解 $E[I]$,$E[S]$,$E[B]$,$E[D]$和 $E[C]$

由指数分布的无记忆性,生产线关闭时间长度是 N 个服从参数为 λ 的指数分布的数学期望之和,即:

$$E[I]=\frac{N}{\lambda}$$

而

$$\frac{E[I]}{E[C]}=P_I=\frac{N[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)} \tag{30}$$

$$\frac{E[S]}{E[C]}=P_S=\frac{\delta[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)} \tag{31}$$

$$\frac{E[B]}{E[C]}=P_B=\rho \tag{32}$$

$$\frac{E[D]}{E[C]}=P_D=\frac{\rho v}{\omega} \tag{33}$$

因此得到

$$E[C]=\frac{\omega(N+\delta)}{\lambda[\omega-\rho(v+\omega)]} \tag{34}$$

$$E[S]=\frac{1}{\tau} \tag{35}$$

$$E[B]=\frac{\rho\omega(N+\delta)}{\lambda[\omega-\rho(v+\omega)]} \tag{36}$$

$$E[D]=\frac{\rho\alpha(N+\delta)}{\lambda[\omega-\rho(v+\omega)]} \tag{37}$$

预期费用函数

有以上计算出来的期望值,建立下面的关于变量 N 的期望值函数来寻求 N-策略的最优值 N^*:

因为生产线运行并且正常工作的概率$\frac{E[B]}{E[C]}=P_B=\rho$ 和生产线处于故障状态的概率$\frac{E[D]}{E[C]}=P_D=\frac{\rho v}{\omega}$都是与 N 无关的常量,而单位时间的预期收益也只跟 P_B 相关,故也是和 N 无关的常量。所以,定义参数:C_0 为生产线正常运行时单位时间运行成本;C_r 为生产线故障时单位时间的维修成本;R 为生产线正常运行时单位时间收益(看作负的成本);C_h 为系统内每份订单单位时间的库存成本;C_p 为生产线处于启动时间时单位时间费用;$C_{f_1}(C_{f_2})$ 为开(关)生产线的固定费用,令 $C_f=C_{f_1}+C_{f_2}$。

预期费用函数可以表示为:

$$\begin{aligned}F(N)&=C_hL_N+C_p\frac{E[S]}{E[C]}+C_f\frac{1}{E[C]}+C_o\frac{E[B]}{E[C]}+C_r\frac{E[D]}{E[C]}-R\\&=C_h\left(\frac{QN(N-1)}{2}+\frac{\lambda}{\tau}+\frac{\rho(\lambda v+v\omega+\omega^2)}{\omega[\omega-\rho(v+\omega)]}\right)+C_p\frac{\delta[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)}+C_f\frac{\lambda[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)}\\&\quad+C_o\rho+C_r\frac{\rho v}{\omega}-R\\&=C_h\frac{N(N-1)}{2(N+\delta)}+C_p\frac{\delta[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)})+C_f\frac{\lambda[\omega-\rho(v+\omega)]}{\omega(N+\delta)}+C_o\rho+C_r\frac{\rho v}{\omega}\\&\quad+C_h\left(\frac{\lambda}{\tau}+\frac{\rho(\lambda v+v\omega+\omega^2)}{\omega[\omega-\rho(v+\omega)]}\right)-R\end{aligned} \tag{38}$$

求解上式得:

$$N^{(*)}=\left[\frac{2(\delta C_p+\lambda C_f)[\omega-\rho(v+\omega)]}{C_h\omega}+\delta(\delta+1)\right]^{1/2}-\delta \tag{39}$$

则 $N^*=\min\{[N^{(*)}],[N^{(*)}]+1\}$

4 数值模拟

4.1 队长模拟

令 $\lambda=3.0,\mu=6.0,\phi=0.9,\tau=4.0,v=0.05,\omega=1.0$,利用 Matlab 计算当策略 N 取值分别为 1~20 时的稳态等待队长,结果如图 2 所示。

由图 2 可看出,随着策略 N 逐渐变大,等待队长也随之变大。但这并不表示 N 策略越小越好,由下一节来说明。

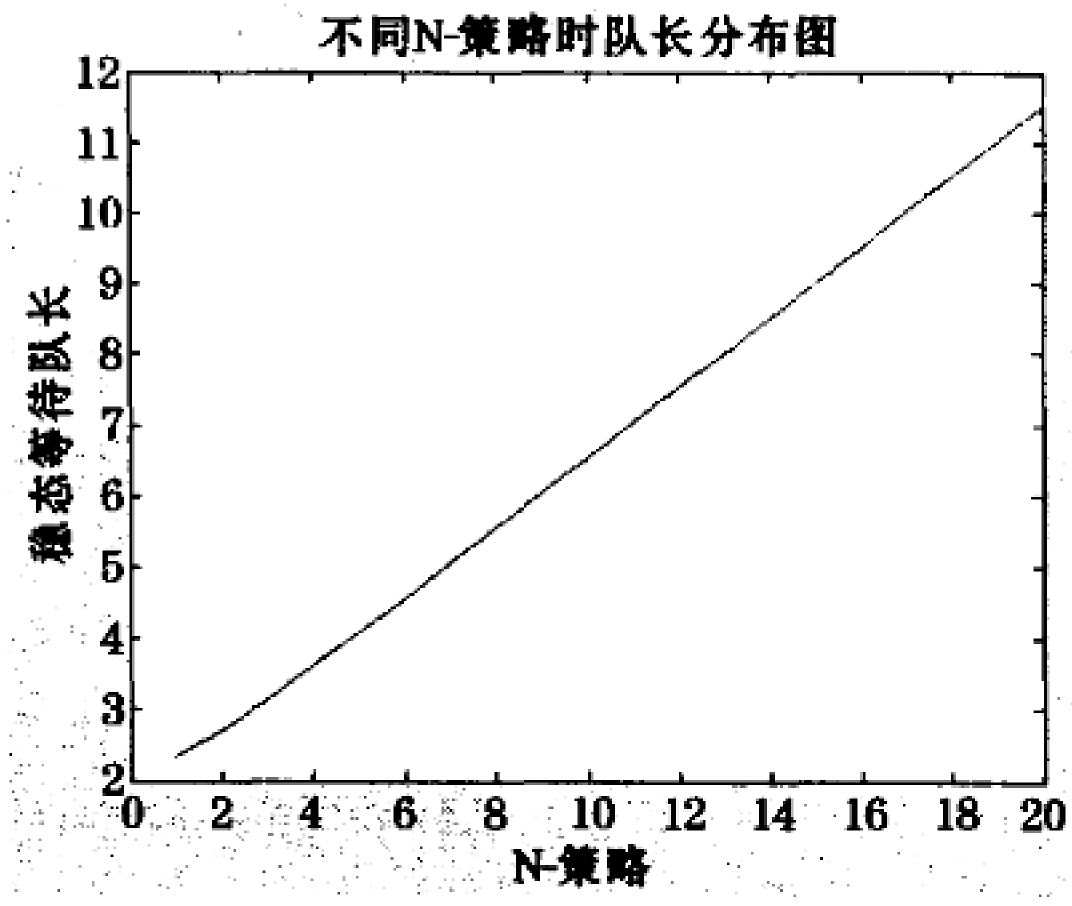

图 2 不同 N-策略时队长分布图

4.2 最优 N-策略模拟

令 $\phi\mu=10,\tau=8,v=0.1,\omega=2,C_p=150,C_f=200,C_h=50$,到达率 λ 由 1 增加到 8 时的最优 N-策略如图 3 所示。

同理,令 $\lambda=3,\phi=1,\tau=4,v=0.05,\omega=1,C_p=150,C_f=200,C_h=50$,到达率 μ 由 5 增加到 12 时的最优 N-策略如图 4 所示。

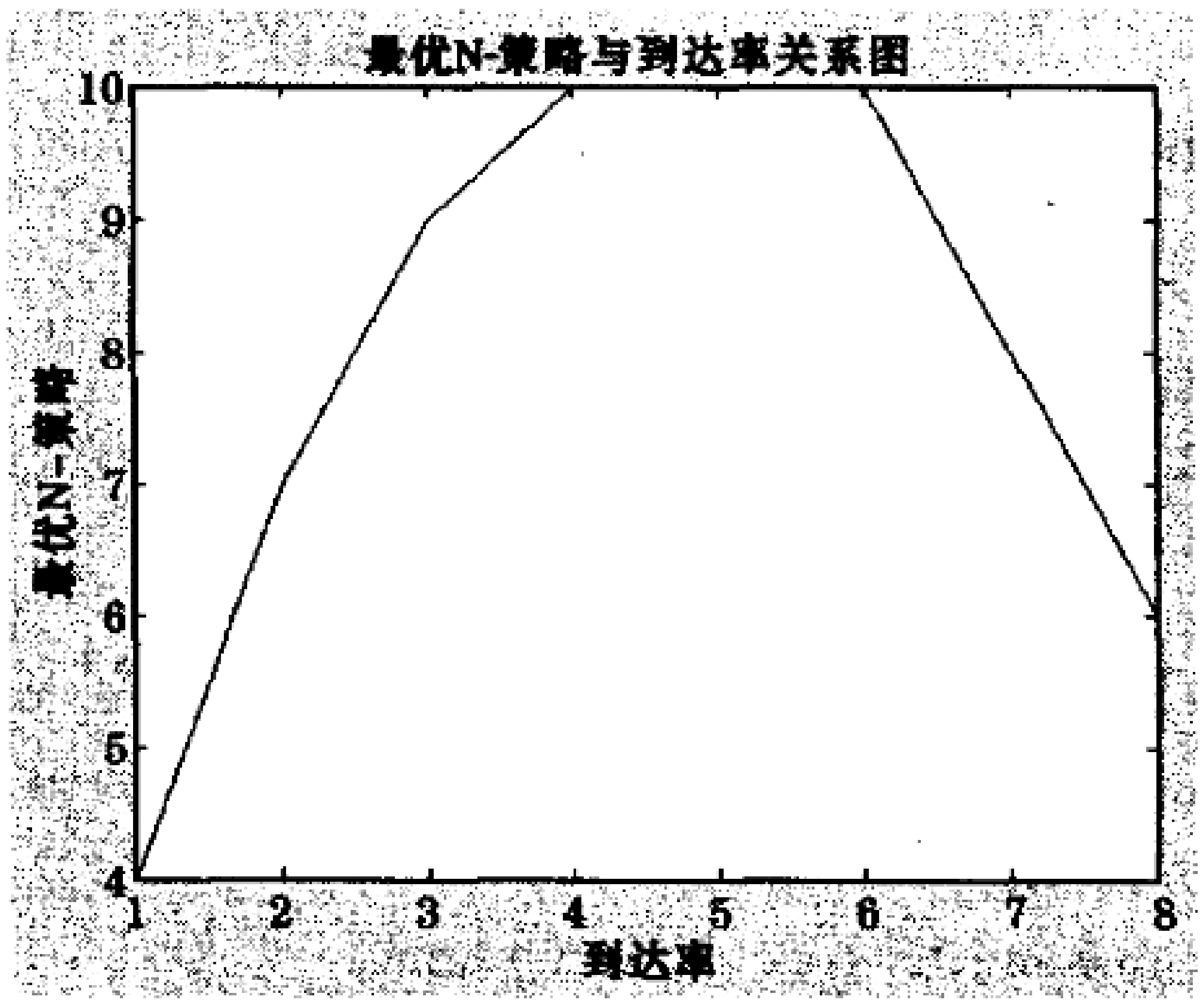

图 3 最优 N-策略与到达率关系图

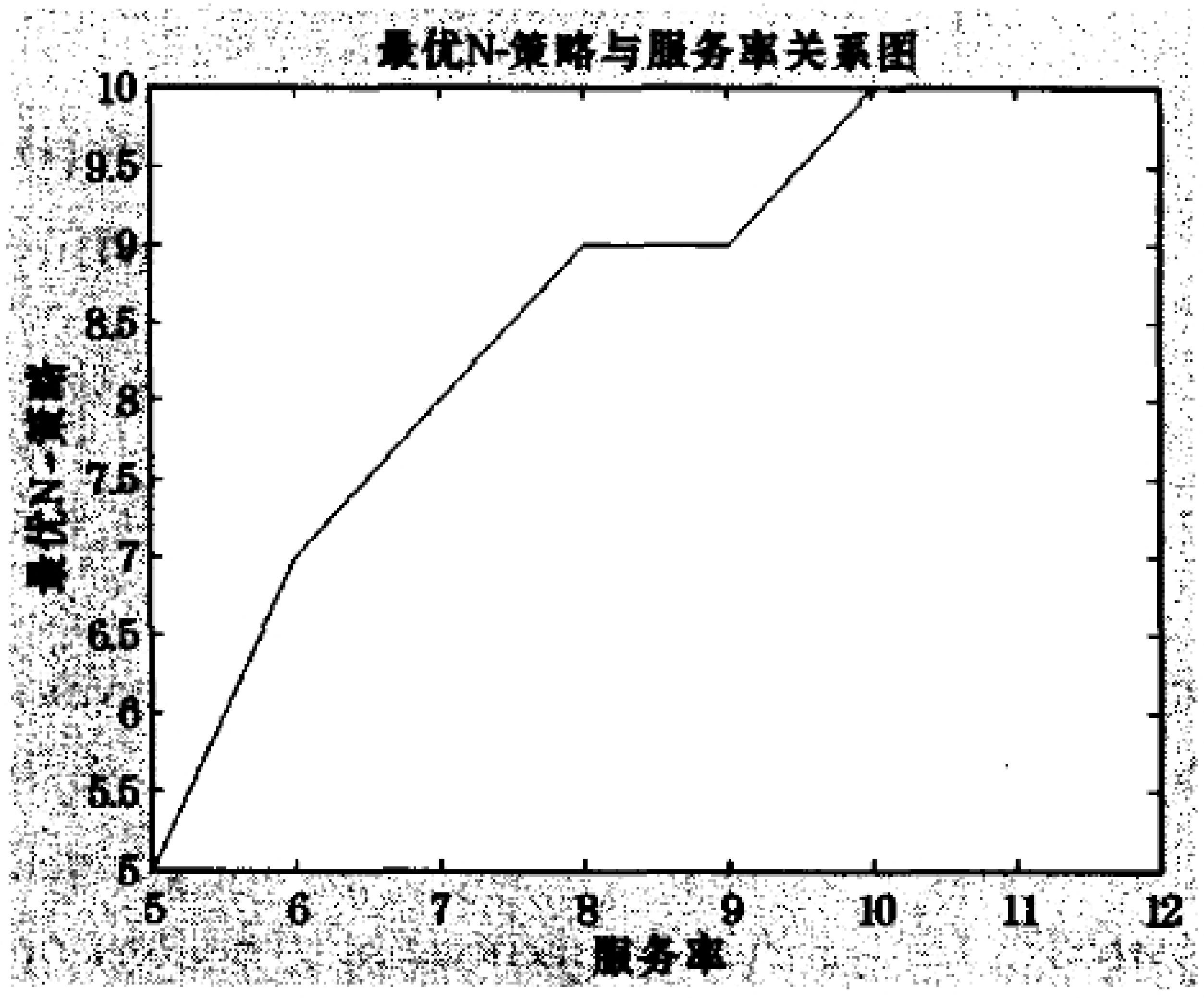

图 4 最优 N-策略与服务率关系

由以上分析可以看出,N-策略随着到达率和服务率等变量的变化呈现出有规律的变化,而不是 N 越小越好。

5 结论

研究了精益生产环境下,带指数启动时间和反馈的生产线可修单服务台 N-策略 M/M/1 随机服务服务系统,利用概率母函数给出了模型的各项稳态指标,并将以前的研究结果以特例的方式给出;设计了预期费用函数,利用函数求解出当预期费用最少时的最优 N-策略;并对模型进行了数值模拟。

参考文献:

[1] 孙永安. 实施精益生产方式的有效性[J]. 华北航天工业学院学报,2002,12(1):21-23.

[2] 朱翼隽,朱仁祥. 基于重试不耐烦 M/M/S/K+M 排队的呼叫中心性能分析[J]. 江苏大学学报(自然科学版),2004,25(5):401-404.

[3] Yadin M, Naor P. Queueing systems with a removable service station[J]. Operational Research Quarterly,

1963,14:393-405.

[4] Kuo-Hsiung Wang Optimal control of a removable and non-reliable server in an M/M/1 queueing system with exponential startup time[J]. Oper Res,2003,58:29-39.

[5] Baker KR A note on operating policies for the queue M/M/1 with exponentialstartups[J]. INFOR,1973,11:71-72.

[6] Wang K-H, Huang H-M. Optimal control of an M/Ek/1 queueing system with a removable service station[J]. Journal of the Operational Research Society,1995,46:1014-1022.

[7] Wang K-H, Huang H-M. Optimal control of a removable server in an M/Ek/1queueing system with finite capacity[J]. Microelectronics and Reliability,1995,35:1023-1030.

[8] Bell CE. Characterization and computation of optimal policies for operating an M/G/1 queueing system with removable server[J]. Operations Research,1971,19:208-218.

[9] Heyman DP. Optimal operating policies for M/G/1 queueing system[J]. Operations Research,1968,16:362-382.

[10] Teghem Jr. Optimal control of a removable server in an M/G/1 queue with finitecapacity[J]. European Journal of Operational Research,1987,31:358-367.

[11] Wang K-H, Ke J-C A recursive method to the Optimal control of an M/G/1 queueingsystem with finite capacity and infinite capacity[J]. Applied Mathematical Modelling,2000,24:899-914.

Optimization analysis of product line's performance based on N-policy queuing model

WANG Lei[1,2], WANG Dian-kui[3]

(1.School of Business Nanjing University,Nanjing 210093,China;2.Nanjing State-owned Assts Investment&Management Holding(Group)CO.,LTD Nanjing 210093,China;3.Faculty of Science Jiangsu University,Zhenjiang 212013,China)

Abstract: A single removable and non-reliable server in the N policy M/M/1 queuing system is studied. The steady-state results are derived and it is shown that the probability that the s3erver is busy is equal to the traffic intensity. The cost model is developed to determine the optimal operating N policy at minimum cost.

Key words: lean production; generating function; product line; queuing; N-policy; startup time