

# 掀开Excel『规划求解』的

# 神秘面纱

# 目录

1. 关于“规划求解”
2. 如何加载“规划求解”
3. “规划求解”各参数解释和设置
4. “规划求解”的步骤
5. “规划求解”疑难解答
6. 利用“规划求解”解线性规划问题
7. 利用“规划求解”解整数规划问题
8. 利用“规划求解”解目标规划问题
9. 利用“规划求解”解运输问题
10. 利用“规划求解”解最短路径问题
11. 利用“规划求解”解最大流问题
12. 利用“规划求解”解数据包络分析（DEA）问题
13. 利用“规划求解”解其他运筹学问题

## 1、 关于“规划求解”

“规划求解”是 Excel 中的一个加载宏，借助“规划求解”，可求得工作表上某个单元格（被称为目标单元格）中公式（公式：单元格中的一系列值、单元格引用、名称或运算符的组合，可生成新的值。公式总是以等号 (=) 开始。）的最优值。“规划求解”将对直接或间接与目标单元格中公式相关联的一组单元格中的数值进行调整，最终在目标单元格公式中求得期望的结果。“规划求解”通过调整所指定的可更改的单元格（可变单元格）中的值，从目标单元格公式中求得所需的结果。在创建模型过程中，可以对“规划求解”模型中的可变单元格数值应用约束条件（约束条件：“规划求解”中设置的限制条件。可以将约束条件应用于可变单元格、目标单元格或其他与目标单元格直接或间接相关的单元格。而且约束条件可以引用其他影响目标单元格公式的单元格。使用“规划求解”可通过更改其他单元格来确定某个单元格的最大值或最小值。

Microsoft Excel 的“规划求解”工具取自德克萨斯大学奥斯汀分校的 Leon Lasdon 和克里夫兰州立大学的 Allan Waren 共同开发的 Generalized Reduced Gradient (GRG2) 非线性最优化代码。线性和整数规划问题取自 Frontline Systems 公司的 John Watson 和 Dan Fylstra 提供的有界变量单纯形法和分支边界法。

## 2、 如何加载“规划求解”

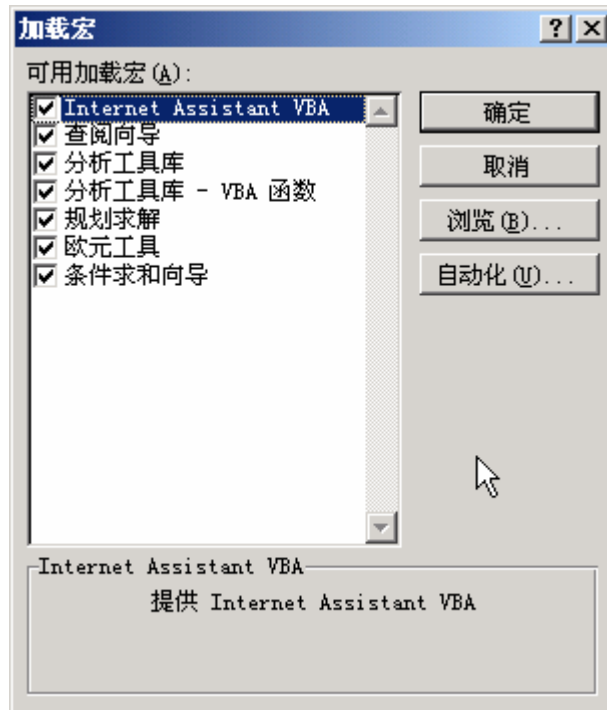
安装 office 的时候，系统默认的安装方式不会安装宏程序，需要用户根据自己的需求选择安装。

下面是加载“规划求解”宏的步骤：

- 1) 在“工具”菜单上，单击“加载宏”。



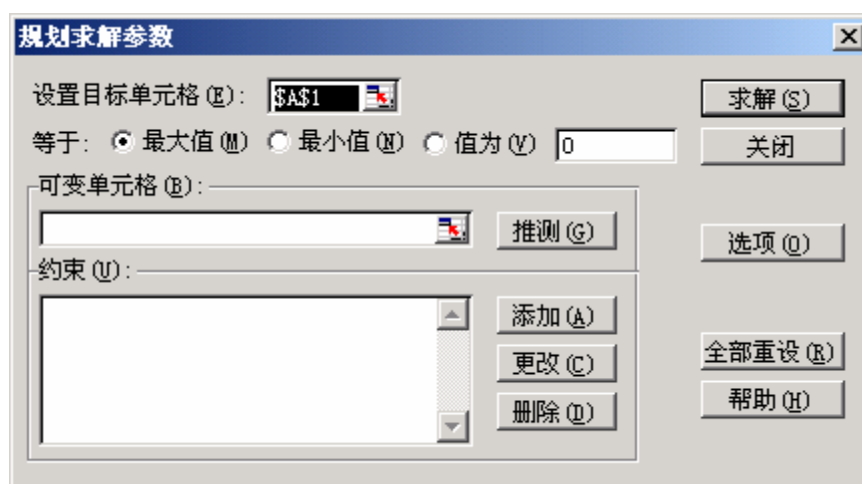
- 2) 在弹出的对话框中的“可用加载宏”列表框中，选定待添加的加载宏“规划求解”选项旁的复选框，然后单击“确定”。单击“确定”以后，“工具”菜单下就会出现一项“规划求解”。如果需要其他功能，也可以用鼠标勾选。提醒一句，加载的宏越多，excel 启动的时候就会越慢，所以请根据自己的需要选择。



- 3) 如果要卸载已经加载的宏，请在“可用加载宏”列表框中，选定待添加的加载宏选项旁的复选框，然后单击“确定”。

### 3、“规划求解”各参数解释和设置

单击“规划求解”按钮，将会出现以下的规划求解参数的对话框。



- 🔧 设置目标单元格：一些单元格、具体数值、运算符号的组合。注意：目标单元格一定要是公式，即一定是以“=”开始。类似于线

性规划中的目标函数。

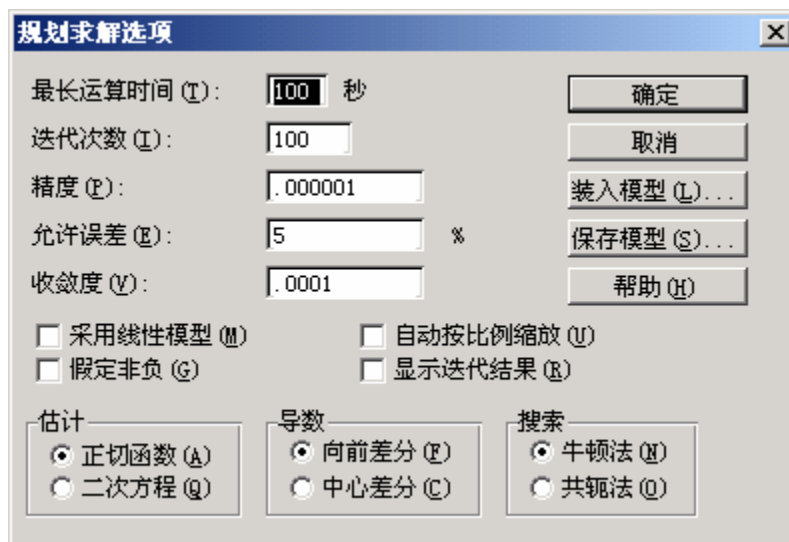
- 🔗 最大值、最小值：在此指定是否希望目标单元格为最大值、最小值或某一特定数值。如果需要指定数值，请在右侧编辑框中键入该值。
- 🔗 可变单元格：在此指定可变单元格。求解时其中的数值不断调整，直到满足约束条件并且“设置目标单元格”框中指定的单元格达到目标值。可变单元格必须直接或间接地与目标单元格相关联。类似于线性规划中的变量。
- 🔗 推测：单击此按钮，自动推测“设置目标单元格”框中的公式所引用的所有非公式单元格，并在“可变单元格”框中定位这些单元格的引用。
- 🔗 约束：在此列出了规划求解的所有约束条件。
- 🔗 添加：显示“添加约束”对话框。



- 🔗 更改：显示“更改约束”对话框。注意：单击此按钮的时候，要先选择需要更改的约束。
- 🔗 删除：删除选定的约束条件。同样单击此按钮前，要先选择需要删除的约束。
- 🔗 求解：对定义好的问题进行求解。
- 🔗 关闭：关闭对话框，不进行规划求解。但保留通过“选项”、“添加”、“更改”或“删除”按钮所做的更改。也就是说，当你下次









再次单击“规划求解”按钮后，对话框显示上回所设置的参数。

- ✚ 选项：显示“规划求解选项”对话框。在其中可加载或保存规划求解模型，并对求解过程的高级属性进行控制。








- ✚ 最长运算时间：在此设定求解过程的时间。可输入的最大值为 32767（秒），默认值 100（秒）可以满足大多数小型规划求解要求。
- ✚ 迭代次数：在此设定求解过程中迭代运算的次数，限制求解过程的时间。可输入的最大值为 32767，默认值 100 次可满足大多数小型规划求解要求。
- ✚ 精度：在此输入用于控制求解精度的数字，以确定约束条件单元格中的数值是否满足目标值或上下限。精度值必须表示为小数（0 到 1 之间），输入数字的小数位越多，精度越高。例如，0.0001 比 0.01 的精度高。
- ✚ 允许误差：在此输入满足整数约束条件并可被接受的目标单元格求解结果与真实的最佳结果间的百分偏差。这个选项只应用于具有整数约束条件的问题。设置的允许误差值越大，求解过

程就越快。


-  **收敛度：**在此输入收敛度数值，当最近五次迭代后目标单元格中数值的变化小于“收敛度”框中设置的数值时，“规划求解”停止运行。收敛度只应用于非线性规划求解问题，并且必须表示为小数（0 到 1 之间）。设置的数值越小，收敛度就越高。例如，0.0001 表示比 0.01 更小的相对差别。收敛度越小，“规划求解”得到结果所需的时间就越长。
-  **采用线性模型：**当模型中的所有关系都是线性的，并且希望解决线性优化问题时，选中此复选框可加速求解进程。
-  **显示迭代结果：**如果选中此复选框，每进行一次迭代后都将中断“规划求解”，并显示当前的迭代结果。
-  **自动按比例缩放：**如果选中此复选框，当输入和输出值量级差别很大时，可自动按比例缩放数值。例如，基于百万美元的投资将利润百分比最大化。
-  **假定非负：**如果选中此复选框，则对于在“添加约束”对话框的“约束值”框中没有设置下限的所有可变单元格，假定其下限为 0（零）。
-  **估计：**指定在每个一维搜索中用来得到基本变量初始估计值的逼近方案。
-  **正切函数：**使用正切向量线性外推
-  **二次方程：**用二次方程外推法，提高非线性规划问题的计算精度。



-  导数：指定用于估计目标函数和约束函数偏导数的差分方案。
-  向前差分：用于大多数约束条件数值变化相对缓慢的问题。
-  中心差分：用于约束条件变化迅速，特别是接近限定值的问题。  
虽然此选项要求更多的计算，但在“规划求解”不能返回有效解时也许会有帮助。
-  搜索：指定每次的迭代算法，以确定搜索方向。
-  牛顿法：用准牛顿法迭代需要的内存比共轭法多，但所需的迭代次数少。
-  共轭法：比牛顿法需要的内存少，但要达到指定精度需要较多次的迭代运算。当问题较大和内存有限，或步进迭代进程缓慢时，可用此选项。
-  装入模型：显示“装入模型”对话框，输入对所要加载的模型的引用。
-  保存模型：显示“保存模型”对话框，在其中可指定保存模型的位置。只有需要在工作表上保存多个模型时，才单击此命令。  
第一个模型会自动保存。

#### 4、“规划求解”的步骤

- 1) 首先在表格上建立模型，然后单击“规划求解”按钮，出现“规划求解参数”的对话框。
- 2) 在“设置目标单元格”框中，输入目标单元格的单元格引用（单元格引用：用于表示单元格在工作表上所处位置的坐标集。例如，显示在第 B 列和第 3 行交叉处的单元格，

其引用形式为“B3”。) 或名称 (名称: 代表单元格、单元格区域、公式或常量值的单词或字符串。名称更易于理解, 例如, “产品”可以引用难于理解的区域“Sales!C20:C30”。)。目标单元格必须包含公式 (公式: 单元格中的一系列值、单元格引用、名称或运算符的组合, 可生成新的值。公式总是以等号 (=) 开始。)。可以单击  选择单元格。

- 3) 若要使目标单元格中数值最大, 请单击“最大值”。若要使目标单元格中数值最小, 请单击“最小值”。若要使目标单元格中数值为确定值, 请单击“值为”, 再在编辑框中键入数值。
- 4) 在“可变单元格”框中, 输入每个可变单元格的名称或引用, 用逗号分隔不相邻的引用。可变单元格必须直接或间接与目标单元格相联系。最多可以指定 200 个可变单元格。若要使“规划求解”基于目标单元格自动设定可变单元格, 请单击“推测”。
- 5) 在“规划求解参数”对话框的“约束”下, 单击“添加”。




- 6) 在“单元格引用位置”框中, 输入需要对其中数值进行约束的单元格引用 (单元格引用: 用于表示单元格在工作表上所处位置的坐标集。例如, 显示在第 B 列和第 3 行交

叉处的单元格，其引用形式为“B3”。)或单元格区域的名称（名称：代表单元格、单元格区域、公式或常量值的单词或字符串。名称更易于理解，例如，“产品”可以引用难于理解的区域“Sales!C20:C30”。)。





- 7) 单击希望在引用单元格和约束条件（约束条件：“规划求解”中设置的限制条件。可以将约束条件应用于可变单元格、目标单元格或其他与目标单元格直接或间接相关的单元格。）之间使用的关系（“<=”、“=”、“>=”、“Int”或“Bin”）。如果单击“Int”，则“约束值”框中会显示“整数”；如果单击“Bin”，则“约束值”框中会显示“二进制”。
- 8) 在“约束值”框中，键入数字、单元格引用或名称，或键入公式（公式：单元格中的一系列值、单元格引用、名称或运算符的组合，可生成新的值。公式总是以等号(=)开始。).
- 9) 若要接受约束条件并要添加其他的约束条件，请单击“添加”。若要接受约束条件并返回“规划求解参数”对话框，请单击“确定”。
- 10) 注意：只能在对可变单元格的约束条件中应用“Int”和“Bin”关系。当“规划求解选项”对话框中的“采用线性模型”复选框被选中时，对约束条件的数量没有限制。对于非线性问题，每个可变单元格除了变量的范围和整数限制外，还可以有多达 100 个约束。

- 11) 更改或者删除约束。在“规划求解参数”对话框的“约束”下，单击要更改或删除的约束条件（约束条件：“规划求解”中设置的限制条件。可以将约束条件应用于可变单元格、目标单元格或其他与目标单元格直接或间接相关的单元格。）。单击“更改”，并进行所需的更改，或单击“删除”。
- 12) 单击“求解”，再执行下列操作之一：若要在工作表中保存求解后的数值，请在“规划求解结果”对话框中，单击“保存规划求解结果”；若要恢复原始数据，请单击“恢复为原值”。注意：按 Esc 可以中止求解过程，Microsoft Excel 将按最后找到的可变单元格的数值重新计算工作表。若求出解，请在“报告”框中单击一种报表类型，再单击“确定”。报表保存在工作簿中新生成的工作表上。

## 5、“规划求解”疑难解答

 尚未找到满足要求的结果，“规划求解”即停止了运行。

由于下列任意一个原因，“规划求解”在找到答案前，可能停止运行：

-  中断了求解过程。
-  在单击“求解”之前，选中了“规划求解选项”对话框中的“显示迭代结果”选项。
-  在单步迭代过程中，或达到最长运算时间或最大迭代次数时，单击了“停止”按钮。
-  选中了“规划求解选项”对话框中的“采用线性模型”复选框，

但问题是非线性的。

✚ 在“规划求解参数”对话框的“设置目标单元格”框中指定的数值不收敛地增加或减少。

✚ 需要让“规划求解”运行更长的时间以求得结果。请调整“规划求解选项”对话框中的“最长运算时间”或“迭代次数”的设置。

✚ 对于具有整数约束条件的问题，应该减小“规划求解选项”对话框中的“允许误差”的设置，使“规划求解”找到更好的整数解。

✚ 对于非线性问题，应该减小“规划求解选项”对话框中的“收敛度”的设置，使目标单元格数值变化缓慢时，“规划求解”仍可以运行，最终找到较好的结果。

✚ 应该选中“规划求解选项”对话框中的“自动按比例缩放”复选框，可能一些输入数值相差几个数量级，或输入和输出数值相差几个数量级。

✚ 当“规划求解”停止运行时，在“规划求解结果”对话框中显示出完成信息。单击“保存规划求解结果”或“恢复为原值”，进行所需的更改，然后再运行一次。

🔗 可变单元格与约束条件或目标单元格中的数值差别很大。


✚ 当可变单元格的典型数值与约束单元格或目标单元格中的数值相差几个数量级时，请选中“规划求解选项”对话框中的“自动按比例缩放”复选框。对于非线性问题，在单击“规划求解

参数”对话框中的“求解”之前，请确认可变单元格的初始数值与期望的最终数值的数量级相同。


 未得到预期的结果。


对于非线性问题，在可变单元格中尝试不同的初始值可能会有帮助，特别是在“规划求解”结果与期望的数值差别很大时。预先将可变单元格的数值设置为预期的最优值，可以减少求解时间。

对于线性模型（也就是当“规划求解选项”对话框的“采用线性模型”复选框被选中时），改变可变单元格的初始值不会影响最终数值或求解时间。

 “规划求解”得到的结果与以前的结果不同。

“规划求解”显示如下消息：“规划求解已收敛到当前结果。满足所有约束条件”。这表明目标单元格中的数值在最近五次求解过程中的变化量小于“规划求解选项”对话框中“收敛度”设置的值。“收敛度”中设置的值越小，“规划求解”在计算时就会越精细，但求解过程将花费更多的时间。

 “规划求解”不能达到最优解。

 “规划求解”不能改进当前解。所有约束条件都得到了满足。

这表明仅得到近似值，迭代过程无法得到比显示结果更精确的数值；或是无法进一步提高精度，或是精度值设置得太小，请在“规划求解选项”对话框中试着设置较大的精度值，然后再运行一次。

#### 求解达到最长运算时间后停止

这表明在达到最长运算时间限制时，没有得到满意的结果。若要保存当前结果并节省下次计算的时间，请单击“保存规划求解”或“保存方案”选项。

#### 求解达到最大迭代次数后停止

这表明在达到最大迭代次数时，没有得到满意的结果。增加迭代次数也许有用，但是应该先检查结果数值来确定问题的原因。若要保存当前值并节省下次计算的时间，请单击“保存规划求解”或“保存方案”选项。

#### 目标单元格中的数值不收敛

这表明即使满足全部约束条件，目标单元格数值也只是有增或有减但不收敛。这可能是在设置问题时忽略了一项或多项约束条件。请检查工作表中的当前值，确定数值发散的原因，并且检查约束条件，然后再次求解。

#### “规划求解”未找到合适结果

这表明在满足约束条件和精度要求的条件下，“规划求解”无法得到合理的结果，这可能是约束条件不一致所致。请检查约束条件公式或类型选择是否有误。

#### “规划求解”应用户要求而中止

这表明在暂停求解过程之后，或在单步执行规划求解时，单击了“显示中间结果”对话框中的“停止”。

#### 无法满足设定的“采用线性模型”条件

这表明求解时选中了“采用线性模型”复选框，但是“规划求解”最后计算结果并不满足线性模型。计算结果对工作表中的公式无效。若要验证问题是否为非线性的，请选中“自动按比例缩放”复选框，然后再运行一次。如果又一次出现同样信息，请清除“采用线性模型”复选框，然后再运行一次。

#### “规划求解”在目标或约束条件单元格中发现错误值

这表明在最近的一次运算中，一个或多个公式的运算结果有误。请找到包含错误值的目标单元格或约束条件单元格，更改其中的公式或内容，以得到合理的运算结果。

还有可能是在“添加约束”或“改变约束”对话框中键入了无效的名称或公式，或者在“约束”框中直接键入了“integer”或“binary”。若要将数值约束为整数，请在比较运算符列表中单击“Int”。若要将数值约束为二进制数，请单击“Bin”。

#### 内存不足以求解问题

Microsoft Excel 无法获得“规划求解”所需的内存。请关闭一些文件或应用程序，再试一次。

#### 其他的 Microsoft Excel 实例正在使用 SOLVER.DLL

这表明有多个 Microsoft Excel 会话正在运行，其中一个会话正在使用 SOLVER.DLL。SOLVER.DLL 同时只能供一个会话使用。

## 6、利用“规划求解”解线性规划问题



下面我们以一个例子说明如何在excel建立线性规划模型及求解。

$$\max z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1) 在 excel 上建立线性规划模型，如下图

	A	B	C	D	E
1	目标函数	0	=B4-2*B5+B6		
2					
3	变量				
4	x1	0			
5	x2	0			
6	x3	0			
7			=B4+B5+B6		
8	约束				
9	0	<=	12		
10	0	<=	6		
11	0	<=	9		
12					
13			=2*B4+B5-B6		
14					
15			=-B4+3*B6		
16					
17					

- 2) 单击“工具”菜单下的“规划求解”，在弹出的“规划求解参数”对话框中输入各项参数。
- 3) 设置目标单元格和选择最大值。

A	B	C	D	E	F	G	H	I
目标函数	0	=B4-2*B5+B6						
变量								
x1	0							
x2	0							
x3	0							
约束								
0	<=	12						
0	<=	6						
0	<=	9						

**规划求解参数**

设置目标单元格 (E):

等于: ☒ 最大值 (M) ☐ 最小值 (M) ☐ 值为 (V)

可变单元格 (E):

约束 (U):

推测 (G) 添加 (A) 更改 (C) 删除 (D)

4) 设置可变单元格。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1 目标函数	0	=B4-2*B5+B6							
2									
3 变量									
4 x1	0								
5 x2	0								
6 x3	0								
7 约束									
8									
9	0	<=	12						
10	0	<=	6						
11	0	<=	9						
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									

**规划求解参数**

设置目标单元格 (E):

等于: ☒ 最大值 (M) ☐ 最小值 (M) ☐ 值为 (V)

可变单元格 (E):

约束 (U):

推测 (G) 添加 (A) 更改 (C) 删除 (D)

5) 添加约束。

**添加约束**

单元格引用位置:  约束值 (C):

确定 取消 添加 (A) 帮助 (H)

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$

**改变约束**

单元格引用位置:  约束值 (C):

确定 取消 添加 (A) 帮助 (H)

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6$$

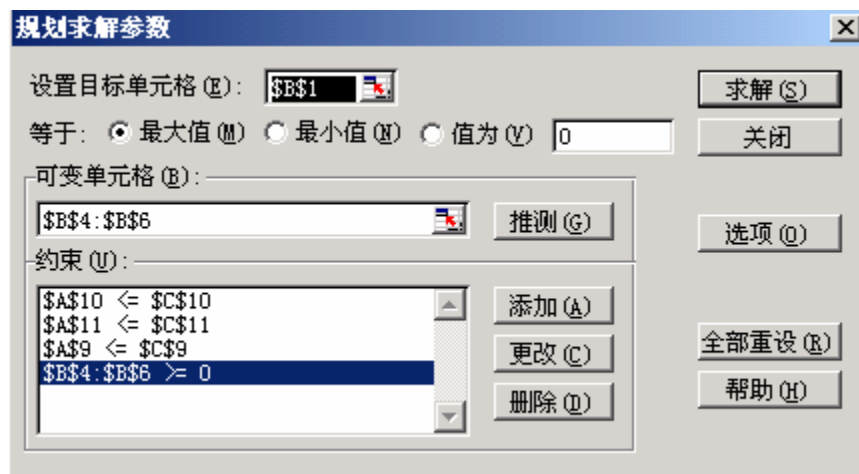


$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$



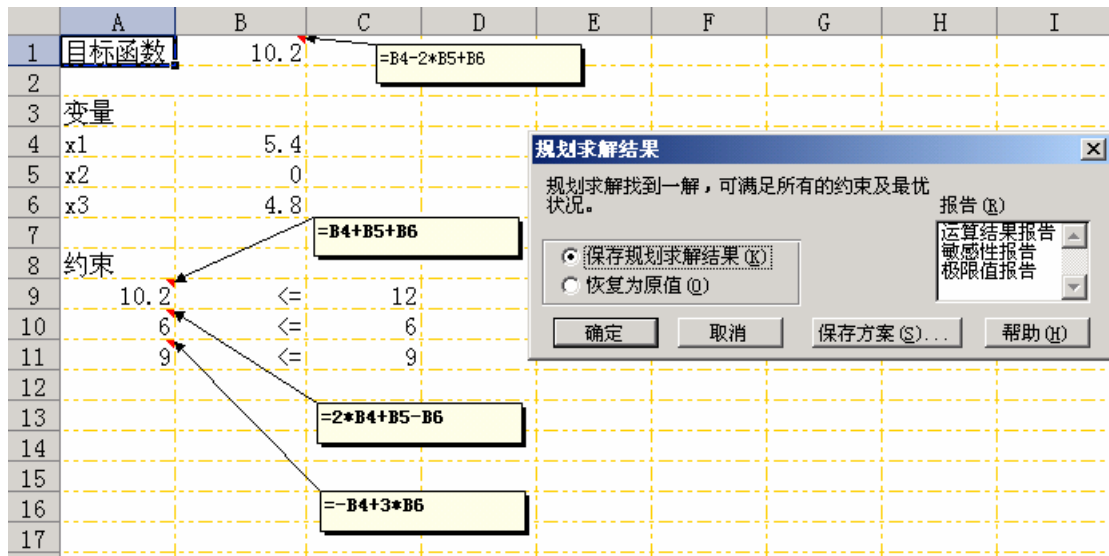
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6) 参数设置完毕，如下：



7) 由于这个例子比较简单，系统默认的参数可以满足求解功能，所以不需要设置“选项”里面的参数。

8) 求解结果。点击右面的报告选项，可以生成相应的报告。



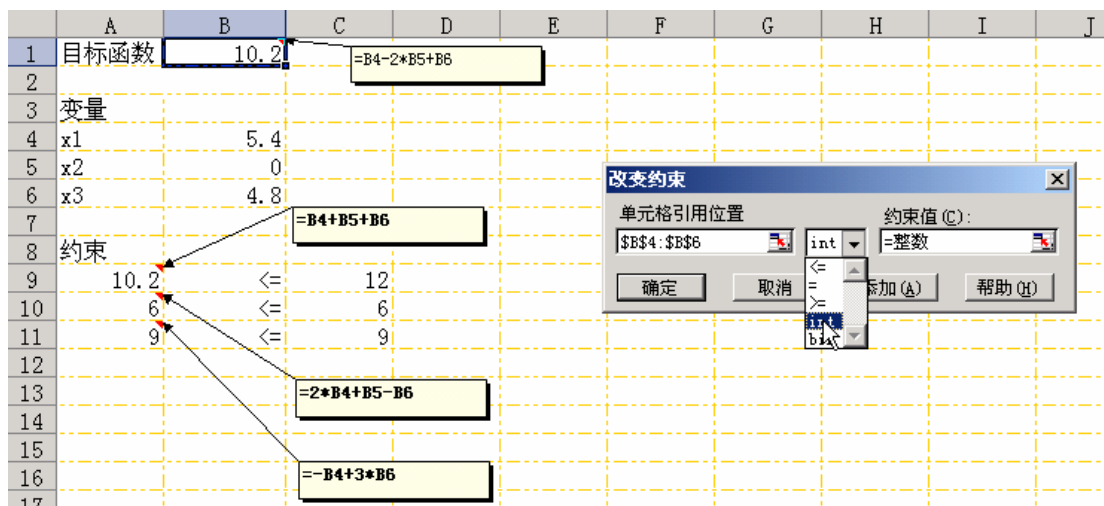
全部求解过程结束，请读者自己练习下面的题目：

$$\begin{aligned} \min z = & -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \\ \text{s.t} \quad & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 12 \\ & x_1 + x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

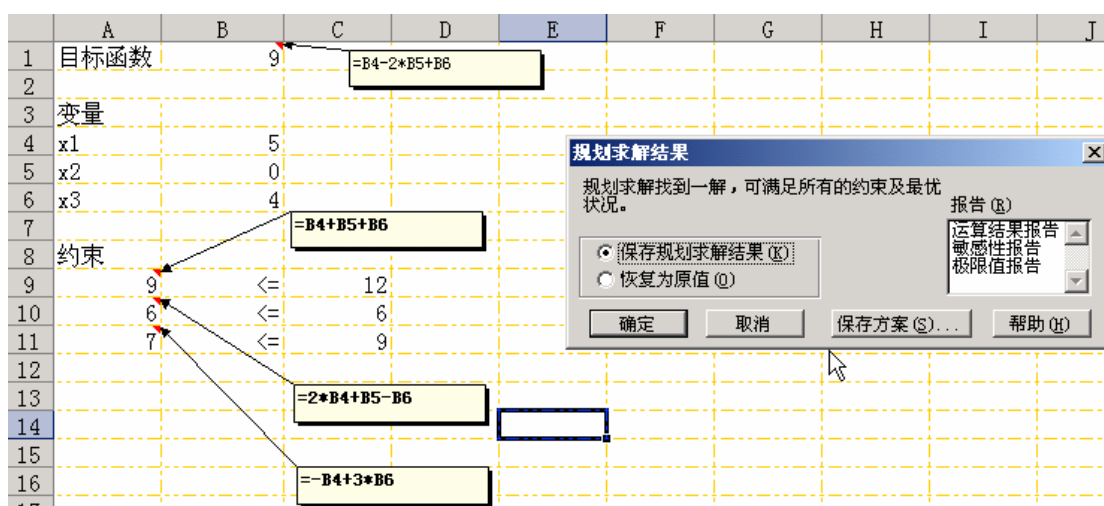
### 7、利用“规划求解”解整数规划问题

整数规划在实际的工作中有很广泛的应用。利用“规划求解”功能求解整数规划的过程和解线性规划的过程差不多，只不过需要设置变量为整数而已。

仍然以上面的例子为例，看一下如何求解整数规划问题。我们假设上述问题 $x_1, x_2, x_3$ 均是整数，我们只需再添加一个约束就行了，如下图：



求解结果如下：



“规划求解”还可以用来求0-1整数规划问题，即变量都是0或1的线性规划问题。我们只要在整数规划的基础上再添加两个约束就可以求解0-1整数规划问题了。令所有变量大于等于0且小于等于1，并且为整数，实际上就限定了变量只能为0或者1。

单元格引用位置	约束值 (C):
$\$B\$4:\$B\$6$	$\leq$ 1
确定	取消
添加 (A)	帮助 (H)

单元格引用位置	约束值 (C):
$\$B\$4:\$B\$6$	$\geq$ 0
确定	取消
添加 (A)	帮助 (H)

下面是一道0-1整数规划的题，请读者自己练习。

答案：  $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=1, \min=3$

$$\begin{array}{l} \text{Min} = 3x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{st.} \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{或} 1 \end{array}$$

## 8、利用“规划求解”解目标规划问题

目标规划是一种十分有用的多目标规划工具，有着广泛的应用。  
目标规划的数学模型实际上就是最小化型的线性规划，可以用单纯型法求解，既可以用规划求解功能求解。

下面以一个例子求解

$$\begin{array}{l} \min\{p_1(d_1^- + d_1^+), p_2d_2^-, p_3d_3^-, p_4(5d_3^+ + 3d_2^+)\} \\ \text{st.} \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 800 \\ 5x_1 + d_2^- - d_2^+ = 2500 \\ 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1400 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i=1, 2, 3) \end{array}$$

首先在 excel 上建模

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	变量								
2	x1	x2	d1-	d1+	d2-	d2+	d3-	d3+	
3									
4	子目标								
5	min	min	min	min					
6		0	0	0	0				
7									
8	目标函数		=C3+D3	=G3					
9		0							
10			=SUM (A6:D6)	=E3					
11	约束								
12		0 ≤		800					
13		0 ≤		2500					
14		0 ≤		1400					
15			=A3+B3+D3-C3						
16			=5*A3+E3-F3						
17			=3*B3+G3-H3						
18									
19									
20									

$\min(p_1(d_1^- + d_1^+), p_2 d_2^-, p_3 d_3^-, p_4(5d_3^+))$   
 st.  
 $x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 800$   
 $5x_1 + d_2^- - d_2^+ = 2500$   
 $3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 1400$   
 $x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i = 1, 2, 3)$

添加约束

设置目标单元格 (E):

等于: ☐ 最大值 (M) ☒ 最小值 (N) ☐ 值为 (V)

可变量单元格 (E):

约束 (U):

求解

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	变量							
2	x1	x2	d1-	d1+	d2-	d2+	d3-	d3+
3	500	466.6667	166.6667	0	0	0	0	0
4	子目标							
5	min	min	min	min				
6	166.6667	0						
7								
8	目标函数	=C3+D3						
9	166.6667							
10		=SUM(A6						
11	约束							
12	800	=						
13	2500	=						
14	1400	=	1400			st.		
15			=A3+B3+D3-C3					
16								

## 9、利用“规划求解”解运输问题

如下算例，A1、A2、A3 为产地，B1、B2、B3、B4 为销地，各个产地的产量和各个销地的销量及从产地运送一单位货品到各个销地的费用如图所示。我们用 excel 的“规划求解”功能求解这个运输问题。

	B1	B2	B3	B4	产量
A1	4	12	4	11	16
A2	2	10	3	9	10
A3	8	5	11	8	22
销量	8	14	12	14	

- 1) 首先在 excel 表格上建立运输问题的模型，如图所示。图中绿色部分是变量，代表从某产地运到某销地的产品数量。各部分的解释已经标注在图上，不再详述。特别要说明的是用于计算目标值的函数 SUMPRODUCT，它计算的是两个矩阵各个相对应元素乘积的和。在这里我们要求的运输成本最小，就是所有产地 i 到销地 j 的运输单位成本乘上运量的和最小。



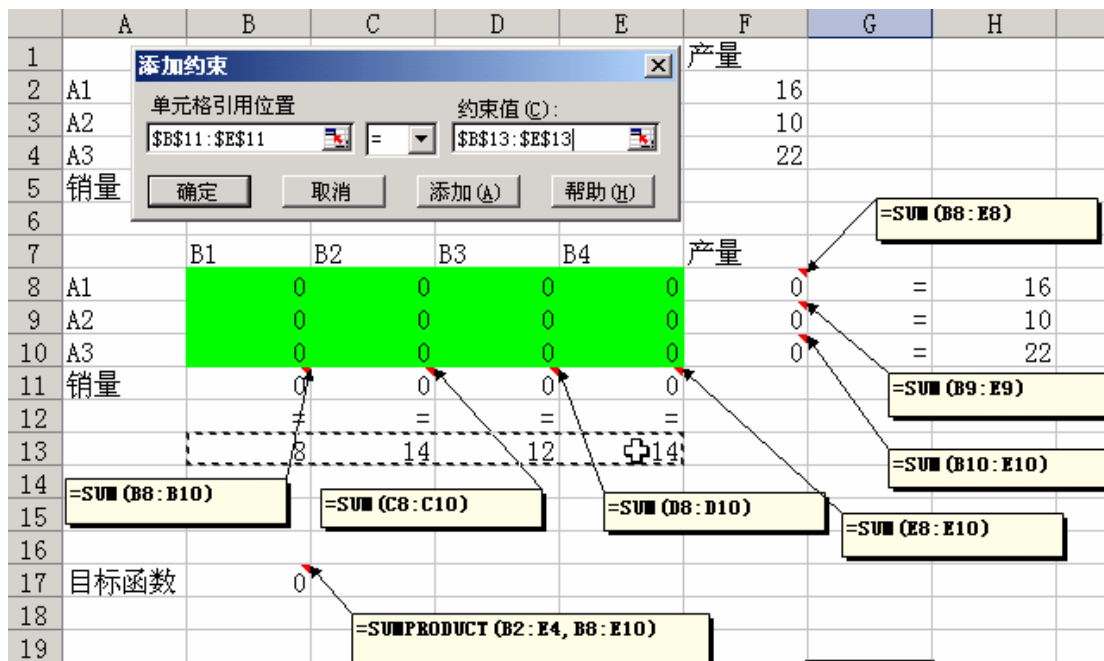
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		B1	B2	B3	B4	产量			
2	A1	4	12	4	11	16			
3	A2	2	10	3	9	10			
4	A3	8	5	11	8	22			
5	销量	8	14	12	14				
6									
7		B1	B2	B3	B4	产量			
8	A1	0	0	0	0	0	=SUM(B8:E8)		
9	A2	0	0	0	0	0	=	16	
10	A3	0	0	0	0	0	=	10	
11	销量	0	0	0	0	0	=SUM(B9:E9)		
12									
13		8	14	12	14		=SUM(B10:E10)		
14									
15									
16									
17	目标函数	0							
18									
19									

2) 添加目标单元格，变量，约束。

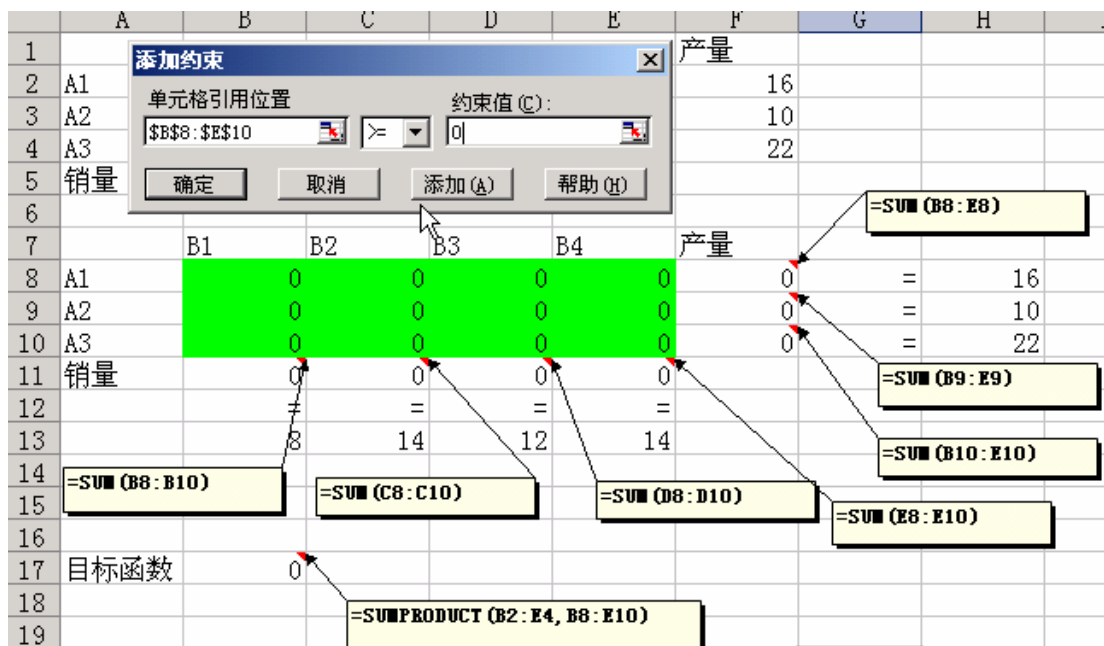
约束 1: 产量

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1						产量			
2	A1					16			
3	A2					10			
4	A3					22			
5	销量								
6									
7		B1	B2	B3	B4	产量			
8	A1	0	0	0	0	0	=SUM(B8:E8)		
9	A2	0	0	0	0	0	=	16	
10	A3	0	0	0	0	0	=	10	
11	销量	0	0	0	0	0	=SUM(B9:E9)		
12									
13		8	14	12	14		=SUM(B10:E10)		
14									
15									
16									
17	目标函数	0							
18									
19									

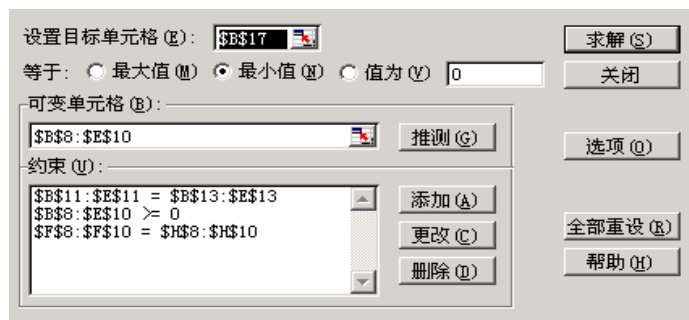
约束 2: 销量



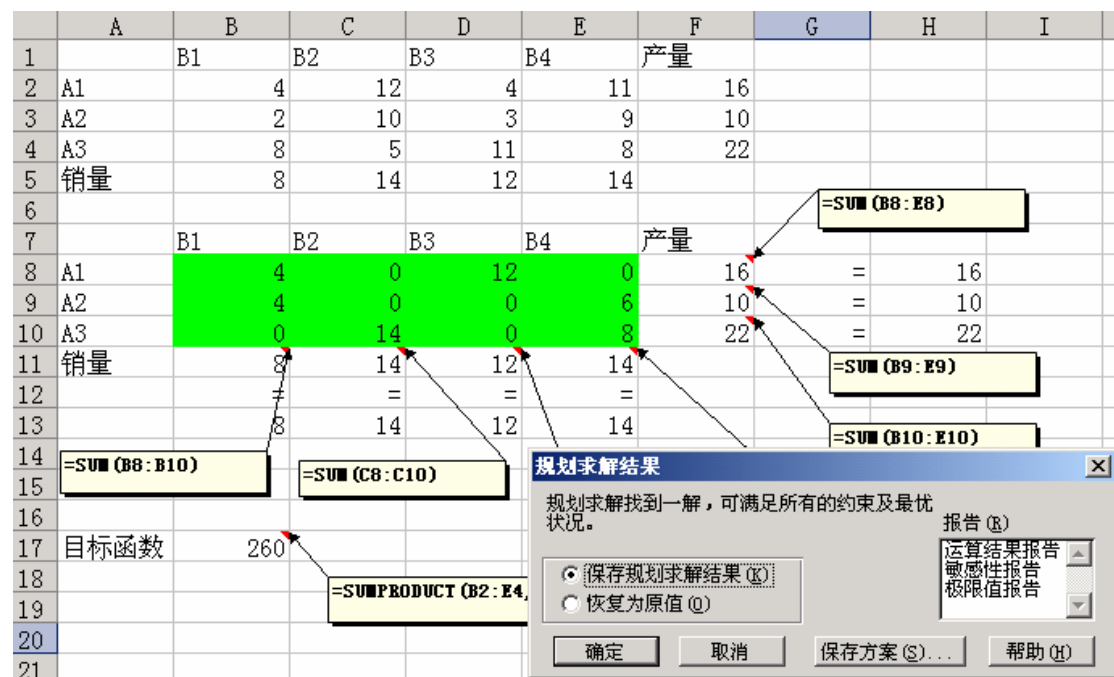
约束 3: 变量大于 0



最后参数设置如下:



### 3) 求解结果

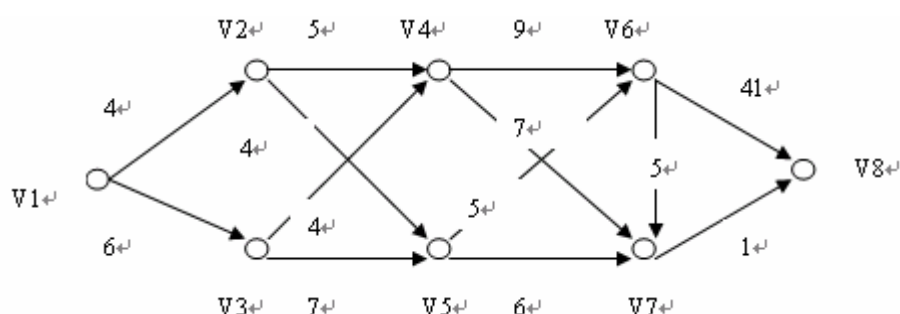


指派问题，即有  $n$  个人和  $n$  件事，已知第  $i$  人做第  $j$  事的费用为  $c_{ij}$ ，要求确定人和事之间的一一对应指派关系，使完成这  $n$  件事的总费用最少，其实就属于 0-1 整数规划问题，它的模型和运输问题的模型基本相同，下面是其中一个模型，请读者自己练习。

	B1	B2	B3	B4	B5			
A1	4	8	7	15	12			
A2	7	9	17	14	10			
A3	6	9	12	8	7			
A4	6	7	14	6	10			
A5	6	9	12	10	6			
	B1	B2	B3	B4	B5	总计		
A1	0	0	1	0	0	1	=	1
A2	-3.6E-10	1	0	0	0	1	=	1
A3	1	0	0	-3.6E-10	8.96E-11	1	=	1
A4	0	0	0	1	0	1	=	1
A5	-2E-11	0	2E-11	0	1	1	=	1
总计	1	1	1	1	1			
	1	1	1	1	1		minz=	34

## 10、利用“规划求解”解最短路径问题

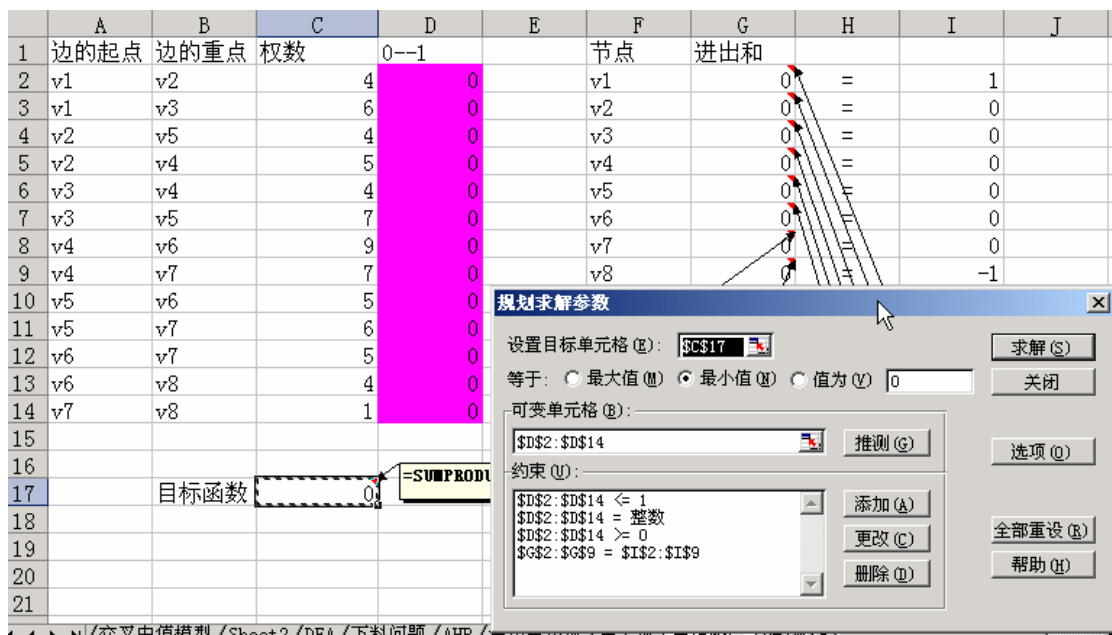
有如下的网络图。需要计算从  $v_1$  点到  $v_8$  点的最短路径。用 excel 求解最短路径的原理是：令变量为 0 或者 1。即如果最短路径通过  $v_1v_2$ ,  $v_2v_4$ ....., 则设变量为 1, 不通过则为 0, 除起点和终点之外, 每个点的进出权数和是 0, 起点的进出权数和是 1, 终点是-1, 目标函数是各边权数和对应变量乘积的和。于是得到一组等式约束, 通过求解可以得到最短路径和最短路程。



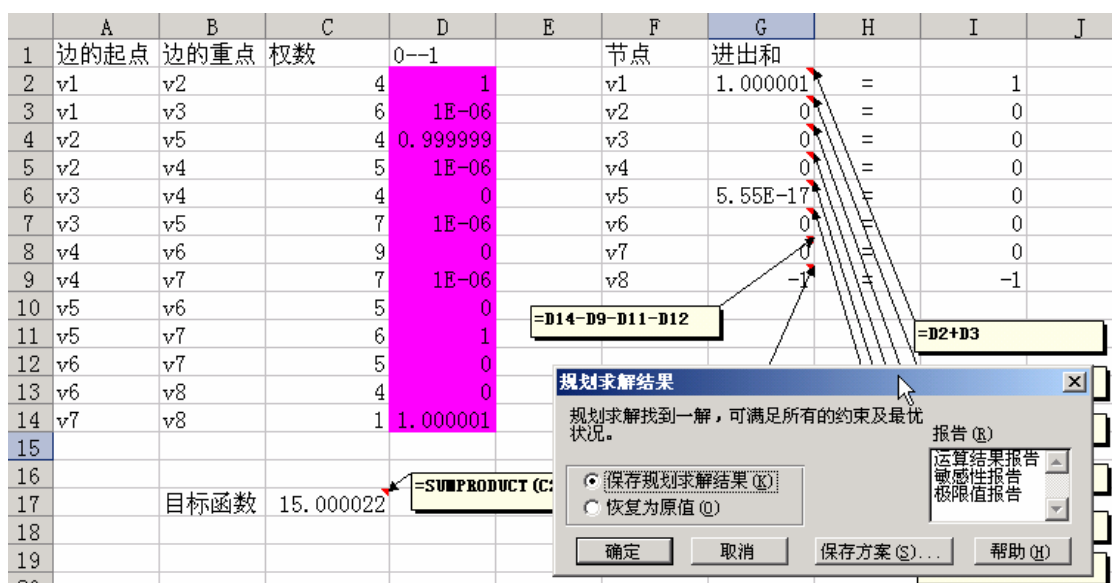
在 excel 上建立模型如下,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	边的起点	边的重点	权数	0--1		节点	进出和			
2	v1	v2	4	0		v1	0	=	1	
3	v1	v3	6	0		v2	0	=	0	
4	v2	v5	4	0		v3	0	=	0	
5	v2	v4	5	0		v4	0	=	0	
6	v3	v4	4	0		v5	0	=	0	
7	v3	v5	7	0		v6	0	=	0	
8	v4	v6	9	0		v7	0	=	0	
9	v4	v7	7	0		v8	0	=	-1	
10	v5	v6	5	0						
11	v5	v7	6	0						
12	v6	v7	5	0						
13	v6	v8	4	0						
14	v7	v8	1	0						
15										
16										
17		目标函数	0							
18										
19										
20										

添加约束

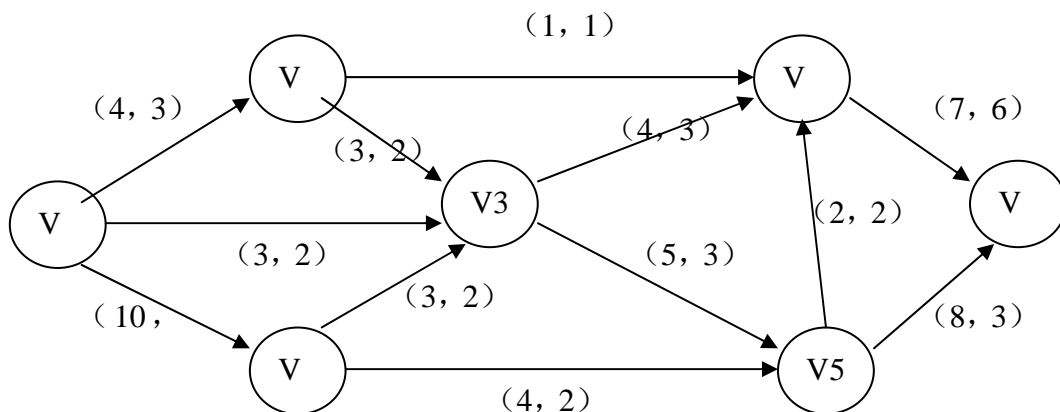


## 求解结果



图中变量是 1 的边就是最短路经过的边，即 v1v2-----v2v5-----v5v7-----v7v8,最短路程是 15。注意：1E-06 表示接近 0，可以看作 0，可以通过调节“选项”中的精度一项达到。如把精度降到 0.01 就可以得到变量全为 0 或 1。请读者自己调节。

## 11、利用“规划求解”解最大流问题



在 excel 上建立模型如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	边	边的流量		边的容量		节点	节点流量		节点容量	
2	vsv1	0 <=		4	vs		0			
3	vsv3	0 <=		3	v1		0	=	0	
4	vsv4	0 <=		10	v2		0	=	0	
5	v1v2	0 <=		1	v3		0	=	0	
6	v1v3	0 <=		3	v4		0	=	0	
7	v3v2	0 <=		4	v5		0	=	0	
8	v3v5	0 <=		5	vt		0			
9	v4v5	0 <=		4						
10	v4v3	0 <=		3						
11	v5vt	0 <=		8						
12	v5v2	0 <=		2						
13	v2vt	0 <=		7						
14										
15	最大流	0								

添加约束：

最后求解得到最大流为 14（请读者自行练习）

## 12、利用“规划求解”解数据包络分析（DEA）问题

数据包络分析(data envelopment analysis,DEA)是美国著名运筹

学家 A. Charnes 等人以相对效率概念为基础发展起来的一种效率评价方法。具有单输入单输出的过程或决策单元其效率可简单的定义为：输出/输入，A. Charnes 等人将这种思想推广到具有多输入多输出生产有效性分析上。对具有多输入多输出的生产过程或决策单元，其效率可类似定义为：输出项加权和/输入项加权和，形成了仅仅依靠分析生产决策单元(DMU)的投入与产出数据，来评价多输入与多输出决策单元之间相对有效性的评价体系。这种评价体系以数学规划为工具，综合分析输入输出数据，通过线性优化得出每个指标的最优权重及 DMU 效率的相对指标，据此将所有 DMU 定级排队，确定相对有效的 DMU，并指出其他 DMU 非有效的原因和程度。

以上是很苦涩的说法，没有看过专业文献的人很难看懂。下面举个例子来说，如何评价大学的办学有效性呢？对于大学办学而言，需要投入的是教师人数、科研经费、校园面积等，产出的有学生人数、专利数目、论文数目等。但是这些指标的单位不统一，这时候怎么评估呢？用到的是 DEA 的线性规划模型。

在 DEA 中通常称衡量绩效的组织为决策单元 (decision making unit,DMU),设有  $n$  个决策单元 ( $j=1, 2, 3, \dots$ ), 每个决策单元有相同的  $m$  项投入 ( $i=1, 2, 3, \dots, m$ ) 和相同的  $s$  项产出 ( $r=1, 2, 3, \dots, s$ )。用  $x_{ij}$  表示第  $j$  单元的第  $i$  项投入，有  $r_{ij}$  表示第  $j$  单元的第  $r$  项产出。现在要衡量某一决策单元的  $j_0$  是否 DEA 有效，即是否处在包络线组成生产前沿面上，为此先构造一个由  $n$  个决策单元线性组成的假想决策单元，这个假想决策单元的第  $i$  项投入为  $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} (i=1, 2, \dots, m)$  且

$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 (\lambda_j \geq 0)$ ，决策单元的第  $r$  项产出为  $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} (r=1,2,\dots,s)$  且

$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 (\lambda_j \geq 0)$ 。如果这个假想单元的各项产出均不低于  $j_0$  决策单元的

各项产出，它的各项投入均低于  $j_0$  决策单元的各项投入，即有

$$\begin{aligned} & \min E \\ & \text{ST} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rj_0} (r=1,2,\dots,s) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq E \cdot x_{ij_0} (i=1,2,\dots,m) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 (\lambda_j \geq 0) (j=1,2,3,\dots,n) \end{aligned}$$

这是一个线性规划模型，求解之后如果  $E < 1$ ，则决策单元  $j_0$  非决策 DEA 有效，否则决策单元  $j_0$  DEA 有效。

例：某银行的 4 个分理处的投入产出情况如下，确定个分理处是否 DEA 有效。

	投入		产出		
	职员数	营业面积	储蓄存款	贷款	中间业务
分理处1	15	140	1800	200	1600
分理处2	20	130	1000	350	1000
分理处3	21	120	800	450	1300
分理处4	20	135	900	420	1500

首先确定分理处一的运行是否 DEA 有效，写出线性规划模型如下：



$\min E$   
 $\text{st}$   
 $1800\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 800\lambda_3 + 900\lambda_4 \geq 1800$   
 $200\lambda_1 + 350\lambda_2 + 450\lambda_3 + 420\lambda_4 \geq 200$   
 $1600\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 1300\lambda_3 + 1500\lambda_4 \geq 1600$   
 $15\lambda_1 + 20\lambda_2 + 21\lambda_3 + 20\lambda_4 \leq 15E$   
 $140\lambda_1 + 130\lambda_2 + 120\lambda_3 + 135\lambda_4 \geq 140E$   
 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$   
 $\lambda_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, \dots, n)$

在 excel 上建模如下

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1		投入		产出						
2		职员数	营业面积	储蓄存款	贷款	中间业务				
3	分理处1	15	140	1800	200	1600				
4	分理处2	20	130	1000	350	1000				
5	分理处3	21	120	800	450	1300				
6	分理处4	20	135	900	420	1500				
7										
8	E	X1	X2	X3	X4					
9	1.000001	1.000001	0	0	0					
10										
11		约束								
12		=1800*B9+	>=	1800						
13		=200*B9+3	>=	200		λ1	λ2	λ3	λ4	λ5
14		=1600*B9+	>=	1600						
15		=15*B9+20	<=	15.00002						
16		=140*B9+1	<=	140.0001						
17		=SUM(B9:E	=	1						
18		=A9								

添加约束

设置目标单元格 (E):  求解 (S)  
 等于: ☐ 最大值 (M) ☒ 最小值 (M) ☐ 值为 (V)  关闭  
 可变单元格 (B):  推测 (G)  
 约束 (U):  添加 (A)  
 更改 (C)  
 删除 (D)  
 全部重设 (R)  
帮助 (H)

求解得到

8	E	X1	X2	X3	X4					
9	1.000001	1.000001	0	0	0					
10										
11		约束								
12		1800.002	>=	1800						
13		200.0002	>=	200		λ1	λ2	λ3	λ4	λ5
14		1600.002	>=	1600						
15		15.00002	<=	15.00002						
16		140.0001	<=	140.0001						
17		1.000001	=	1						
18		1.000001								

E=1

就是说分理处一的运行 DEA 有效。请读者朋友自行计算其他分理处的有效性情况。最后只有分理处 2 运行非 DEA 有效。

### 13、利用“规划求解”解其他运筹学问题

运筹学在实际运用中很广泛，比如生产排程、军事物流等，其实，在实际应用中，很多问题都可以建立运筹学模型，用线性规划求解，下面举几个例子，希望对读者有所启发。

#### 1. 精确重心法求解

学过设施规划的人应该都知道精确重心法，它是设施选址常用的方法，什么是精确重心法？简单地说，在一个直角坐标系上有若干个点，已知他们的坐标，要求一点，使这一点到这些点的直线距离之和最小。

假设有5个点，其坐标分别是（3，1）（5，2）（4，3）（2，4）（1，5），另外赋予每个点不同的权重1，7，3，3，6。我们用欧几里德距离计算公式计算两点间的距离。即

$$\min \sum_{i=1}^5 m_i \sqrt{(x_i - x_s)^2 + (y_i - y_s)^2}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	需求点	x	y	权重	xs	ys	X-XS	Y-YS	(X-XS)^2	(Y-YS)^2	SUM	SUM1	
2	1	3	1	1	3.935424	2.980928	-0.93542	-1.981	0.87501721	3.924076	4.799094	2.190683	
3	2	5	2	7			1.064576	-0.981	1.13332303	0.96222	2.095543	10.13319	
4	3	4	3	3			0.064576	0.0191	0.00417012	0.000364	0.004534	0.202002	
5	4	2	4	3			-1.93542	1.0191	3.74586429	1.038507	4.784372	6.561962	
6	5	1	5	6			-2.93542	2.0191	8.61671138	4.076651	12.69336	21.37665	
7							=B7-E7	=C7-F7	=G7*G7	=H7*H7	=SUM(I7:J7)	=SQRT(K7)*D7	
8							=B8-E7	=C8-F7	=G8*G8	=H8*H8	=SUM(I8:J8)	=SQRT(K8)*D8	
9		MIN	40.46449				=B9-E7	=C9-F7	=G9*G9	=H9*H9	=SUM(I9:J9)	=SQRT(K9)*D9	
10							=B10-E7	=C10-F7	=G10*G10	=H10*H10	=SUM(I10:J10)	=SQRT(K10)*D10	
11							=B11-E7	=C11-F7	=G11*G11	=H11*H11	=SUM(I11:J11)	=SQRT(K11)*D11	

然后在excel表格上建立模型如上图

添加约束得

**规划求解参数**

设置目标单元格 (E):

等于: ☐ 最大值 (M) ☒ 最小值 (M) ☐ 值为 (V)

可变动单元格 (B):

约束 (U):

- 
- 

按钮: 求解 (S), 关闭, 选项 (O), 全部重设 (R), 帮助 (H), 添加 (A), 更改 (C), 删除 (D), 推测 (G)

求解之后得

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	需求点	x	y	权重	xs	ys	X-XS	Y-YS	(X-XS)^2	(Y-YS)^2	SUM	SUM1	
2	1	3	1	1	3.935424	2.980928	-0.93542	-1.981	0.87501721	3.924076	4.799094	2.190683	
3	2	5	2	7			1.064576	-0.981	1.13332303	0.96222	2.095543	10.13319	
4	3	4	3	3			0.064576	0.0191	0.00417012	0.000364	0.004534	0.202002	
5	4	2	4	3			-1.93542	1.0191	3.74586429	1.038507	4.784372	6.561962	
6	5	1	5	6			-2.93542	2.0191	8.61671138	4.076651	12.69336	21.37665	
7							=B7-E7	=C7-F7	=G7*G7	=H7*H7	=SUM(I7:J7)	=SQRT(K7)*D7	
8							=B8-E7	=C8-F7	=G8*G8	=H8*H8	=SUM(I8:J8)	=SQRT(K8)*D8	
9		MIN	40.46449				=B9-E7	=C9-F7	=G9*G9	=H9*H9	=SUM(I9:J9)	=SQRT(K9)*D9	
10							=B10-E7	=C10-F7	=G10*G10	=H10*H10	=SUM(I10:J10)	=SQRT(K10)*D10	
11							=B11-E7	=C11-F7	=G11*G11	=H11*H11	=SUM(I11:J11)	=SQRT(K11)*D11	

即所求点是 (3.93, 2.98), 最短距离是40.65

## 2、TSP问题

TSP问题是单回路运输问题最为典型的一个模型，全称是 Traveling salesman problem,也叫旅行商问题。它是一个典型的NP-hard 问题。Tsp模型可以如下描述：在一个n顶点网络，要求找出一个包含所有n个顶点的最小耗费的环路。任何一个包含网络中所有n个顶点的

环路被称作一个回路。在旅行商问题中，要设法找到一条最小耗费的回路。既然回路是包含所有顶点的一个循环，故可以把任何一个点作为起点（也是终点），这也是tsp模型的一个特点。

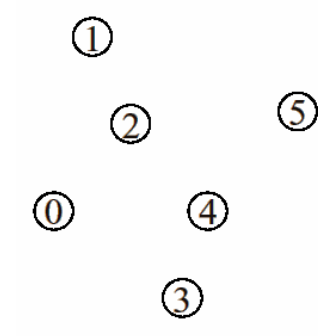
Tsp数学模型如下：

顶点间的距离为  $C_{ij}$ ,

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \\ \text{st.} & \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i=1,2,3,\dots \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j=1,2,3,\dots \\ & x_{ij} = \{0,1\} \\ \text{变量:} & \\ & x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从} i \text{到} j \text{有通路} \\ 0, & \text{从} i \text{到} j \text{无通路} \end{cases} \end{aligned}$$

中小规模的tsp问题可以用整数规划的方法求解，这也是我们为什么可以用excel规划求解功能求解它的原因。下面我们通过一个例子来说明。

例：某公司需要向7个城镇供货，所有货品可以用一辆车一次送完。8个城市之间有公路直接连接，其距离矩阵如下表，设计一条送货行驶距离最短的路径使运费最低。



元素	v1	v2	v3	v4	v5	v6	
v1	—		10	6	8	7	15
v2		—		5	20	15	16
v3			—		14	7	8
v4				—		4	12
v5					—		6
v6						—	

在excel上建立模型如下，图中黄色部分为变量。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	元素	v1	v2	v3	v4	v5	v6			
2	v1	-	10	6	8	7	15			
3	v2	10	-	5	20	15	16			
4	v3	6	5	-	14	7	8			
5	v4	8	20	14	-	4	12			
6	v5	7	15	7	4	-	6			
7	v6	15	16	8	12	6	-			
8										
9	元素	v1	v2	v3	v4	v5	v6	和		
10	v1	0	0	0	0	0	0	0	=	1
11	v2	0	0	0	0	0	0	0	=	1
12	v3	0	0	0	0	0	0	0	=	1
13	v4	0	0	0	0	0	0	0	=	1
14	v5	0	0	0	0	0	0	0	=	1
15	v6	0	0	0	0	0	0	0	=	1
16	和	0	0	0	0	0	0	0		
17		=	=	=	=	=	=			
18		1	1	1	1	1	1			
19										
20	min	0								

添加约束

**规划求解参数**

设置目标单元格 (E):  求解 (S)

等于: ☐ 最大值 (M) ☒ 最小值 (M) ☐ 值为 (V)  关闭

可变单元格 (B):  推测 (G)

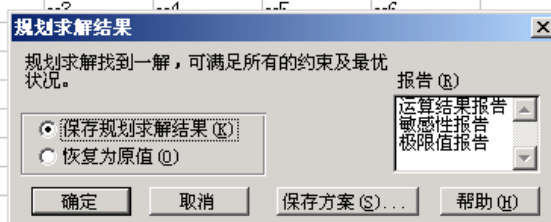
约束 (U):

- 
- 
- 
- 
- 
- 

添加 (A) 更改 (C) 删除 (D) 全部重设 (R) 帮助 (H)

注意必须使对角线上的数字为0。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	元素	v1	v2	v3	v4	v5	v6			
2	v1	-								
3	v2	10	-							
4	v3	6								
5	v4	8								
6	v5	7								
7	v6	15								
8										
9	元素	v1	v2	v3	v4	v5	v6	和		
10	v1	0	1.06E-09	0	1	0	0	1	=	
11	v2	-1.1E-09	0	1	0	0	0	1	=	
12	v3	0	1	0	0	0	1.06E-09	1	=	
13	v4	1	0	0	0	0	-1.1E-09	1	=	
14	v5	0	0	0	3.13E-10	0	1	1	=	
15	v6	0	0	-5.3E-10	1.06E-09	1	0	1	=	
16	和	1	1	1	1	1	1	1		
17		=	=	=	=	=	=			
18		1	1	1	1	1	1			
19										
20	min	38								



=SUM (B10:G10)

=SUM (G10:G15)

=SUMPRODUCT (B2:G7, B10:G15)

## 后记

终于完成了，做得很匆忙，其中必定有很多错误，若有不明白之处，可以来email (jhgk7@163.com) 交流。Good luck!

京华孤客

2005/6/30